ESTIMACIÓN DIRECTA DE DISPOSICIÓN A PAGAR EN MODELOS DE ELECCIÓN DISCRETA

Ricardo A. Daziano, Cornell University, daziano@cornell.edu

RESUMEN

Aunque los parámetros de un modelo de elección discreta carecen de una interpretación económica directa, la razón entre dos parámetros puede ser interpretada como una tasa marginal de sustitución. En particular, es posible obtener la disposición a pagar por mejoramientos cualitativos a partir de la razón de la utilidad marginal de un atributo hedónico y la utilidad marginal del ingreso. En este trabajo se describe una metodología alternativa de estimación de un modelo de elección discreta, basada en la normalización de la utilidad marginal del ingreso, de forma de transformar el espacio de los parámetros directamente en unidades monetarias.

Palabras clave: modelos de elección discreta; disposición a pagar; normalización

ABSTRACT

Whereas the structural taste parameters of a random utility maximization model lack a straightforward interpretation, parameter ratios can be interpreted as marginal rates of substitution. In particular, a consumer's willingness-to-pay for qualitative improvements can be derived from the ratio of the marginal utility of a specific hedonic attribute and the marginal utility of income. In this paper, I propose to use an alternative normalization of scale to obtain direct inference on consumers' monetary valuation of attributes.

Keywords: Discrete choice models; willingness-to-pay space; normalization

1 INTRODUCCIÓN

Quizás el resultado empírico más relevante de los modelos de elección discreta sea la derivación de la valoración monetaria de los consumidores de los atributos que caracterizan a las alternativas. Esta valoración monetaria se obtiene a partir del concepto de disposición a pagar por mejoras cualitativas y es un aspecto clave para el análisis de beneficios a usuarios, así como para la formulación de políticas de transporte y el desarrollo de estrategias de marketing (McFadden, 1999).

El presente trabajo tiene como objetivo derivar y testear un procedimiento alternativo de estimación para la inferencia directa de disposición a pagar. En efecto, la disposición a pagar por lo general se deriva de la razón entre la utilidad marginal de un atributo hedónico específico y la utilidad marginal del ingreso. Desde una perspectiva microeconómica, esta razón representa la tasa marginal de sustitución entre la calidad de un bien discreto y dinero. Desde un punto de vista estadístico, la disposición a pagar es una razón entre parámetros específicos del modelo, si la función de utilidad es lineal. A pesar de la importancia del cálculo de disposición a pagar para el análisis económico del comportamiento de los consumidores, la inferencia estadística de transformaciones no lineales de los parámetros de un modelo econométrico se caracteriza por variados problemas. En efecto, razones de parámetros sufre de problemas de identificación débil, y la distribución asintótica de la razón carece de momentos finitos.

La literatura reciente ha propuesto una reparametrización del modelo desde el espacio de parámetros original que representa preferencias, a un espacio de parámetros que representa el excedente del consumidor a través de la disposición a pagar (Train y Weeks, 2005; Sonnier et al., 2007; Scarpa et al., 2008; Balcombe et al., 2008, 2009; Greene y Hensher, 2010; Hole y Kolstad, 2011). En el nuevo espacio, una utilidad lineal se transforma a una especificación no lineal en la que la disposición a pagar y la utilidad marginal del ingreso son calculadas directamente. Trabajos previos muestran que, mientras que los modelos en el espacio de preferencia originales pueden adaptarse mejor a los datos (ver Train y Weeks, 2005; Sonnier et al., 2007), los modelos rereparametrizados producen estimaciones más realistas de la disposición a pagar (ver Train y Weeks, 2005; Sonnier et al., 2007; Balcombe et al., 2009). Además , los modelos reformuladas permiten al investigador explorar la heterogeneidad de los consumidores de una manera más conveniente. En este artículo, el autor propone un método alternativo para transformar los parámetros directamente al espacio de disposición a pagar usando una normalización de escala diferente.

La contribución de este trabajo es triple. En primer lugar, la normalización de escala es revisitada para demostrar que mediante la restricción de la utilidad marginal del ingreso es posible reformular el espacio de los parámetros de interés, y que esta normalización alternativa proporciona estimadores consistentes y eficientes de la disposición a pagar. Aunque se muestra que la aplicación de la normalización propuesta es equivalente a la reparametrización de Train y Weeks (2005) en los modelos de la familia GEV, la normalización se diferencia de la parametrización en el caso general de términos de error no necesariamente GEV, incluyendo un modelo probit multinomial. En segundo lugar , se propone el uso de un estimador Bayesiano para un modelo probit multinomial de maximización del excedente del consumidor para ilustrar que, al trabajar con la normalización alternativa, ninguna restricción de identificación es necesaria para los elementos de la matriz de covarianza. Por último, se contribuye a la literatura sobre la inferencia de razón de parámetros de un modelo econométrico. Si bien las aplicaciones previas de modelos en el espacio de disposición a pagar el espacio se centran en distribuciones de heterogeneidad, el presente trabajo centra el análisis en la distribución asintótica y la derivación de los intervalos de confianza de cocientes de parámetros.

2 MODELOS DE ELECCIÓN DISCRETA Y DISPOSICIÓN

En modelos microeconométricos de elección discreta, el consumidor i considera elegir el bien discreto j, que se caracteriza por un vector de atributos de calidad $\boldsymbol{q}_{ij}$ y precio p_{ij}. Al resolver el consumo óptimo de bienes continuos, condicional en la elección discreta, es posible derivar la utilidad indirecta condicional truncada $V_{ij} = V(I_i - p_{ij}, \boldsymbol{q}_{ij} | \beta, \lambda)$, donde I_i representa ingreso, β es el vector de parámetros estructurales que representan las preferencias primitivas de los consumidores, y λ es la utilidad marginal del ingreso.

Si se asume que el investigador posee información incompleta sobre el proceso de decisión (probabilidad subjetiva), entonces el término de error ε_{ij} se añade para representar un problema de maximización de la utilidad aleatoria (McFadden, 2001). De esta forma, las preferencias quedan descritas por la función de utilidad aleatoria $U_{ij} = V(I_i - p_{ij}, \boldsymbol{q}_{ij}, \varepsilon_{ij} | \beta, \lambda)$. Diferentes modelos de elección pueden ser especificados, dependiendo de los supuestos estadísticos sobre la distribución del shock sobre las preferencias ε_{ij}.

Por un lado, nótese que a pesar de que los parámetros β permiten al consumidor ordenar las alternativas, están sujetos a efectos de escala y por lo tanto carecen de un valor directamente interpretable.[1] Por otro lado, disposición a pagar (DP) – es decir, la cantidad de dinero que un consumidor está dispuesto a pagar por un mejoramiento en los atributos – no está sujeta a efectos de escala, de hecho se mide en unidades monetarias, y por lo tanto proporciona herramientas para una mejor comprensión de la respuesta de los consumidores. El vector de disposición a pagar está compuesto por la siguiente razón marginal de sustitución:

$$\boldsymbol{DP} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial V_{ij}}{\partial \boldsymbol{q}_{ij}} = -\frac{1}{\partial V_{ij} / \partial p_{ij}} \frac{\partial V_{ij}}{\partial \boldsymbol{q}_{ij}}. \tag{1}$$

La segunda igualdad proviene del hecho que la utilidad marginal del ingreso está dada por el multiplicador de Lagrange de la restricción presupuestaria del problema del consumidor ($\lambda = \partial V_{ij} / \partial I_i = -\partial V_{ij} / \partial p_{ij}$.) Nótese que al asumir un especificación lineal del tipo $V_{ij} = \boldsymbol{q}_{ij}{}' \beta - \lambda p_{ij}$, el problema de estimación estadística de DP se reduce en inferencia en razón de parámetros: $\boldsymbol{DP} = (1/\lambda)\beta$.

[1] La alternativa óptima no cambia si los parámetros de preferencia son multiplicados por la misma constante.

3 ESPACIO DE PARÁMETROS EN DISPOSICIÓN A PAGAR

3.1 Inferencia sobre disposición a pagar

El espacio de parámetros de interés original de un modelo microeconométrico de elección discreta representa preferencias resumidas en las utilidades marginales β and λ, que son desconocidas para el investigador. Sea $\boldsymbol{y}$ es el vector de indicadores de elección de un mecanismo de preferencias reveladas. Valores estimados $\hat{\beta}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ y $\hat{\lambda}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ pueden ser utilizados para obtener una estimación puntual del vector de disposición a pagar. Sin embargo, debido a que la disposición a pagar se define como un cociente, surgen problemas al describir la distribución de esta razón. Por ejemplo, un problema evidente es que la distribución asintótica de la razón, si las utilidades marginales son independientes, sigue una distribución de Cauchy, que carece de momentos finitos. Además, el cociente de los parámetros es localmente casi-no-identificados, es decir, la disposición a pagar es débilmente identificable sobre una parte del espacio de parámetros (Bolduc et al., 2010).

La identificación débil de la razón crea el problema adicional de una mala cobertura de los métodos tradicionales para la construcción de conjuntos de confianza, incluido el método Delta, que exhibe problemas incluso para muestras grandes (Dufour, 1997; Brownstone, 2001). Por lo tanto, ni el método Delta ni Krinsky-Robb se deben utilizar para la estimación de conjuntos de confianza de la disposición a pagar. Por último, todos estos problemas se aplican no sólo a la distribución asintótica de la disposición a pagar, sino también a la distribución de heterogeneidad de las variaciones aleatorias continuas en los gustos, que es un problema que ha atraído gran atención, especialmente en la literatura de modelación del comportamiento de viaje (Algers et al., 1998; Revelt y Train, 1998; Hensher y Greene, 2003; Train y Sonnier, 2005; Hess et al., 2005; Sillano y Ortúzar, 2005; Cirillo yAxhausen, 2006; Meijer y Rouwendal, 2006).

Para evitar los problemas mencionados, y dado que la disposición a pagar es una función económica significativa de los parámetros de preferencias, algunos autores han propuesto transformar los parámetros desde el espacio de preferencias original a uno que mida directamente la disposición a pagar (Train y Weeks, 2005; Sonnier et al., 2007; Scarpa et al., 2008; Balcombe et al., 2008, 2009; Greene y Hensher, 2010; Hole y Kolstad, 2011). En el siguiente apartado se revisa la reparametrización sugerida por (Train y Weeks, 2005).

3.2 Reparametrización en el espacio de disposición a pagar

De acuerdo a Train y Weeks (2005), es posible rescribir la utilidad condicional como

$$V_{ij} = \boldsymbol{q}_{ij}'\beta - \lambda p_{ij} = \lambda \boldsymbol{q}_{ij}'(1/\lambda)\beta - \lambda p_{ij} = \lambda \boldsymbol{q}_{ij}'\boldsymbol{DP} - \lambda p_{ij}. \tag{2}$$

Aplicaciones empíricas en Train y Weeks (2005); Sonnier et al. (2007); Scarpa et al. (2008) y Balcombe et al. (2009) muestran que los modelos reparametrizados producen estimaciones más realistas de la disposición a pagar. La reparametrización $\lambda \boldsymbol{q}_{ij}'\boldsymbol{WTP} - \lambda p_{ij}$ no sólo transforma el espacio de los parámetros a disposición a pagar (con una dimensión adicional dada por la utilidad marginal del ingreso que sigue sujeta a efectos de escala), sino que también transforma la especificación de la utilidad lineal a un problema no lineal. La no linealidad puede explicar los resultados de Train y Weeks (2005) y Sonnier et al. (2007), donde los modelos de la disposición a pagar exhiben una pérdida de ajuste. Sin embargo, Scarpa et al. (2008) encuentran que la reparametrización puede ofrecer mejoras en la bondad de ajuste del modelo a los datos.

4 REVISITANDO LA NORMALIZACIÓN DE ESCALA DE LOS MODELOS DE ELECCIÓN DISCRETA

Es bien sabido que en los modelos de maximización de la utilidad aleatoria, las probabilidades de elección son invariantes a la suma de cualquier constante (ubicación) y a la multiplicación de una constante positiva (escala). Considerando que el parámetro de ubicación es irrelevante si el modelo incluye constantes específicas de las alternativas, la escala debe ser normalizada para asegurar la identificación de los parámetros del modelo.

Para romper la dependencia de la función de verosimilitud de parámetros no identificados, el método imperante es asumir implícitamente una distribución estándar para el término de error, un supuesto que es equivalente a fijar algún elemento de la varianza de la distribución cumulativa del término de error del modelo en diferencias con respecto a una alternativa de base.

Por ejemplo, para un modelo logit condicional, para el cual el término de error es aditivo y $\varepsilon_{ij}\ iid \sim \mathrm{EV1}(0,\mu)$, la normalización estándar es fijar la escala de la distribución de valor extremo $\mu = 1$. Nótese que la normalización del modelo logit condicional es necesaria porque las probabilidad de elección P_{ij} de que el consumidor i escoja la alternativa j es igual a

$$P_{ij} = \frac{exp\left(\mu^{-1}(\boldsymbol{q}_{ij}{}'\beta - \lambda p_{ij})\right)}{\sum_{j=1}^{J} exp\ (\mu^{-1}\left(\boldsymbol{q}_{ij}{}'\beta - \lambda p_{ij})\right)}, \tag{3}$$

donde queda claro que el vector de parámetros en realidad corresponde a $\theta = [(1/\mu)\beta' \quad \lambda/\mu]'$. Puesto que μ, β, y λ no se pueden identificar conjuntamente, una normalización es necesaria. Nótese a su vez que la dependencia de la probabilidad de elección de los parámetros escalados θ es una característica intrínseca de la clase de modelos generalizados de valor extremo (GEV). En general, con una función generadora GEV homogénea de grado μ^{-1}, el vector de parámetros de interés adquiere siempre la forma de θ. Por extensión, esta dependencia explícita de la escala también se produce en mixturas de modelos GEV que consideran heterogeneidad de preferencias aleatoria, incluyendo modelos de tipo logit mixto.

En el caso de modelos probit, se obtiene el mismo resultado sólo para el caso binario. En efecto, la probabilidad de selección de alternativa 1 para un probit binario es $P_{i1} = \Phi(\sigma^{-1}((\boldsymbol{q}_{i1} - \boldsymbol{q}_{i2})'\beta - (\lambda p_{i1} - bdap_{i2})))$, que claramente depende de $(1/\sigma)\beta$ y λ/σ. Luego, la normalización estándar para la identificación de los parámetros de interés es $\sigma = 1$. Sin embargo, la escala global de la utilidad es menos evidente en el modelo probit multinomial con covarianza Σ. La normalización estándar en este caso es fijar el primer elemento de la raíz de Cholesky de la covarianza del modelo con una dimensión reducida (el modelo en diferencias con respecto a una alternativa de base). Esta normalización puede parecer un resultado algebraico oscuro, pero en realidad sigue el mismo razonamiento utilizado para la normalización de la escala de los modelos GEV.

Considérese un modelo probit multinomial en diferencias $\Delta_j \boldsymbol{U}_i = \Delta_j \boldsymbol{X}_i \beta + \boldsymbol{C}\eta_i$, donde Δ_j es un operador matricial de diferencia con respecto a la alternativa de base j, $\boldsymbol{C}$ es la raíz de Cholesky de $(\Delta_j \Sigma \Delta_j{}')^{-1}$, y η es el vector de $(J-1)$ iid términos distribuidos según una ley normal estándar. Usando η es posible derivar una descomposición recursiva de las probabilidades de elección probit

$$P_{ij} = \Phi\left(-\frac{\Delta_j \boldsymbol{x}_{i1}{}'\beta}{c_{11}}\right) \int_{\eta} \Phi\left(-\frac{\Delta_j \boldsymbol{x}_{i2}{}'\beta + c_{21}\eta_{i1}}{c_{22}}\right) \cdots \Phi\left(-\frac{\Delta_j \boldsymbol{x}_{iJ}{}'\beta + [vech\boldsymbol{C}]'\eta}{c_{J-1,J-1}}\right) d\eta. \tag{4}$$

A partir de esta expresión, es claro que dados β y $\boldsymbol{C}$, la probabilidades de elección son invariantes a $a\beta$ y $a\boldsymbol{C}$, para cualquier $a \in \mathbb{R}^+$. El problema de una infinidad de soluciones se resuelve si el primer elemento de la raíz de Cholesky se normaliza de tal manera que $c_{11} = 1$. Sin embargo, el problema también se resuelve si cualquier c_{jj} se normaliza o si cualquier elemento en β se fija igual a 1. Por ende, fijar c_{11} es arbitrario y normalizaciones alternativas son posibles [7]. En el siguiente apartado se propone una normalización alternativa que permite transformar el problema de estimación directamente en el espacio de DP.

4.1 Usando la normalización de escala para obtener disposición a pagar

Como se describe en el inciso anterior, la normalización estándar de los modelos de elección discreta es fijar directamente la escala de la distribución del término de error. Sin embargo, una normalización alternativa es fijar el valor de una utilidad marginal específica. De hecho, la normalización de un coeficiente es el procedimiento estándar para la fijación de la escala en estimadores semiparamétricos de regresiones con variables dependientes binarias (Ichimura, 1993; Klein y Spady, 1993). Por otra parte, ya que el precio p_{ij} es una variable continua, la normalización de λ asegura identificación del modelo (ver Klein y Spady, 1993).

Considérese la siguiente factorización del componente determinística de la utilidad indirecta

$$U_{ij} = \lambda(\boldsymbol{q}_{ij}{}'\boldsymbol{DP} - p_{ij}) + \varepsilon_{ij} \Leftrightarrow \tag{5}$$

$$\text{EC}_{ij} = \frac{U_{ij}}{\lambda} = \boldsymbol{q}_{ij}{}'\boldsymbol{DP} - p_{ij} + \frac{\varepsilon_{ij}}{\lambda}, \tag{6}$$

donde EC_{ij} es el excedente del consumidor i cuando escoge la alternativa j (cf. Jedidi et al., 2003). Por lo tanto, trabajar con el modelo de excedente del consumidor

$$\text{CS}_{ij} = \boldsymbol{q}_{ij}{}'\boldsymbol{WTP} - p_{ij} + \epsilon_{ij} \tag{7}$$

es equivalente a la normalización de la utilidad marginal del ingreso $\lambda = 1$ en el modelo de utilidad aleatoria (5). En esta normalización, la escala de ϵ_i está identificada y por lo tanto puede ser estimada.

4.2 Equivalencia de ambas normalizaciones

Trabajar en el espacio de preferencia o de disposición a pagar conduce a estimadores que son equivalentes. Esta equivalencia se encuentra ya sea con la reparametrización no lineal o la normalización alternativa. La propiedad de invariancia del estimador de máxima verosimilitud se puede utilizar para demostrar la equivalencia de la solución.

Además, debido a que la reparametrización (2) puede ser rescrita como la factorización $\lambda(\boldsymbol{q}_{ij}'\boldsymbol{WTP} - p_{ij})$, la reparametrización de Train y Weeks (2005) es, obviamente, equivalente a la ecuación (5). Aunque Train y Weeks (2005) hace implícita la escala del término aleatorio, la utilidad marginal del ingreso λ está afectada por escala y el parámetro estimado en realidad es λ/μ en el caso de errores con distribuciones de valor extremo y escala μ. De hecho, la expresión de la probabilidad de elección P_{ij} en modelos GEV homogéneos de grado μ^{-1} depende de $\mu^{-1}V_{ij}$. En el caso de la parametrización, la probabilidad de elección depende de $\mu^{-1}\lambda(\boldsymbol{q}_{ij}'\boldsymbol{WTP} - p_{ij})$. Por lo tanto, en modelos GEV la normalización de λ o μ no produce ninguna diferencia en la implementación del estimador de máxima verosimilitud.

Aunque la parametrización no lineal y la normalización alternativa de la utilidad marginal del ingreso no se pueden distinguir de los modelos con un núcleo GEV, esta situación no se extiende a los modelos probit multinomiales. Este hecho se ejemplifica en la siguiente sección.

5 UN MODELO PROBIT DE MAXIMIZACIÓN DEL EXCEDENTE DEL CONSUMIDOR

Considérese el siguiente problema de maximización del excedente del consumidor, donde el agente i escoge la alternativa j que tiene un valor máximo en el vector de excedentes $\boldsymbol{EC}_i$

$$\boldsymbol{EC}_i = \boldsymbol{Q}_i\theta - \boldsymbol{p}_i + \epsilon_i, \quad \epsilon_i \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \Sigma), \tag{8}$$

donde $\boldsymbol{Q}_i$ es una matriz de atributos con filas $\boldsymbol{q}_{ij}'$, θ son los parámetros del modelo que representan disposiciones a pagar (y no utilidades marginales), $\boldsymbol{p}_i$ es el vector de precios, y ϵ_i es un vector de términos de error con distribución normal multivariada. Al igual que con una utilidad aleatoria, la elección en un modelo de excedente del consumidor se determina por un proceso de maximización discreta

$$y_i = j \text{ iff } \mathrm{EC}_{ij} > \mathrm{EC}_{ij'} \forall j' \neq j. \tag{9}$$

La maximización discreta implica que el momento de ubicación central de la distribución del término de error debe ser normalizado. Por lo tanto, es necesario trabajar con el modelo en diferencias que se centra en las variaciones de los excedentes de los consumidores, independientemente de las dotaciones iniciales. Sea Δ_j un operador matricial de diferencia tal que $\Delta_j\boldsymbol{EC}_i$ toma cada elemento $\mathrm{EC}_{ij'}$ en $\boldsymbol{EC}_i$ ($j' \neq j$) y sustrae el elemento base EC_{ij}. Luego es posible rescribir la ecuación (8)

$$\Delta_j\boldsymbol{EC}_i = \Delta_j\boldsymbol{Q}_i\theta - \Delta_j\boldsymbol{p}_i + \Delta_j\epsilon_i, \quad \Delta_j\epsilon_i \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{0}_{(J-1\times1)}, \Delta_j\Sigma\Delta_j'), \tag{10}$$

donde todos los parámetros de la ecuación anterior están identificados, incluyendo los parámetros de la matriz de covarianza en la dimensión reducida $\Delta_j \Sigma \Delta_j{}'$.

Para el modelo de diferencias (10) la regla de decisión es

$$y_i = j \text{ ssi } \Delta_{jj'}\mathrm{EC}_{ij'} < 0 \text{ e } y_i = j' \text{ ssi } \Delta_{jj'}\mathrm{EC}_{ij'} \geq \max\{0, \Delta\mathrm{EC}_{i,-j}\}, \forall j' \neq j, \tag{11}$$

donde $\Delta_{jj'}$ es la fila j' de la matriz Δ_j y $\Delta\mathrm{EC}_{i,-j}$ representa el conjunto de todos los elementos en diferencias de $\boldsymbol{EC}_i$ con respecto al elemento j.

5.1 Estimador Clásico

Usando la descomposición $\Delta_j \epsilon_i = \boldsymbol{C}\eta_i$,[2] la probabilidad de elección P_{ij} de la alternativa j por el agente maximizador de su excedente i puede rescribirse como:

$$P_{ij} = \Phi\left(-\frac{\Delta_{j1}\boldsymbol{q}_{i1}{}'\theta - \Delta_{j1}p_{i1}}{c_{11}}\right)\int_\eta \Phi\left(-\frac{\Delta_{j2}\boldsymbol{q}_{i2}{}'\theta - \Delta_{j2}p_{i2} + l_{21}\eta_{i1}}{c_{22}}\right) dots \\ \Phi\left(-\frac{\Delta_{jJ}\boldsymbol{q}_{iJ}{}'\theta - \Delta_{jJ}p_{iJ} + [vech\boldsymbol{C}]'\eta}{c_{J-1,J-1}}\right)\frac{\phi(\eta_{i1})}{\Phi\left(-\frac{\Delta_{j1}\boldsymbol{q}_{i1}{}'\theta - \Delta_{j1}p_{i1}}{c_{11}}\right)}\cdots\frac{\phi(\eta_{iJ})}{\Phi\left(-\frac{\Delta_{j1}\boldsymbol{q}_{i1}{}'\theta - \Delta_{j1}p_{i1}}{c_{11}}\right)} d\eta, \tag{5}$$

donde $\mathrm{vech}\boldsymbol{C} = \{c_{11}, \dots, c_{J-1,J-1}\}$ es un vector que contiene todos los elementos de la raíz de Cholesky $\boldsymbol{C}$. A pesar de que esta expresión reduce la dimensionalidad de la probabilidad de elección, P_{ij} sigue teniendo la forma de una integral de expresión abierta. El simulador GHK de P_{ij} es construido a partir de métodos de simulación de Monte Carlo y adquiere la forma:

$$\tilde{P}_{ij} \\ = \Phi\left(-\frac{\Delta_{j1}\boldsymbol{q}_{i1}{}'\theta - \Delta_{j1}p_{i1}}{c_{11}}\right)\sum_{s=1}^{S} \Phi\left(-\frac{\Delta_{j2}\boldsymbol{q}_{i2}{}'\theta - \Delta_{j2}p_{i2} + l_{21}\eta_{i1}^{(s)}}{c_{22}}\right) dots \\ \Phi\left(-\frac{\Delta_{jJ}\boldsymbol{q}_{iJ}{}'\theta - \Delta_{jJ}p_{iJ} + [vech\boldsymbol{C}]'\eta^{(s)}}{c_{J-1,J-1}}\right). \tag{6}$$

La solución clásica al problema de estimación es el estimador de máxima verosimilitud simulada (MSLE) $(\hat{\theta}, \mathrm{vech}\widehat{\boldsymbol{C}})_{\mathrm{MSLE}} = \arg\max \sum_i \ln \tilde{P}_{ij_i}$, donde j_i es la alternativa efectivamente escogida por el individuo i. Nótese que al considerar el modelo de maximización del excedente aleatorio

[2]Where $\boldsymbol{C}$ is the Cholesky root of the variance of $\Delta_j \epsilon_i$ and η_i is a vector of normally distributed terms

del conumidor, los parámetros de interés son el vector de disposición a pagar y todos los elementos elementos de la factorización de Cholesky de $(\Delta_j \Sigma \Delta_j{}')^{-1}$. Convergencia del estimador requiere de una muestra grande, pero también de un número de repeticiones de la simulación $S \to \infty$. De hecho, a pesar de que el simulador GHK es insesgado para las probabilidades de elección, para un S finito, MSLE resulta sesgado.

5.2 Estimador Bayesiano

El estimador de Bayes de un modelo probit multinomial en el espacio de preferencia sigue un proceso intuitivo. Si se asume que la utilidad es observable, entonces se podría estimar los parámetros mediante una regresión ordinaria. Debido a que la utilidad es una variable latente, es necesario utilizar la estructura de modelos de elección discreta. Desde una perspectiva Bayesiana, las variables latentes se pueden tratar como parámetros adicionales usando técnicas de aumento de datos. Siguiendo esta premisa y las ideas de Albert y Chib (1993), McCulloch y Rossi (2000) y McCulloch et al. (2000) derivaron un estimador por muestreo de Gibbs. Debido a que en un modelo probit la función de utilidad tiene una distribución normal (sujeta a la región de factibilidad impuesta por los indicadores de elección), una distribución normal truncada se utiliza para generar realizaciones de la utilidad. Las muestras de la utilidad se usan como observaciones de la variable dependiente para la estimación de los parámetros del modelo utilizando una regresión ordinaria de Bayes.

El estimador de Bayes de un modelo multinomial en el espacio de disposición a pagar sigue el mismo principio. Sin embargo, hay un par de las modificaciones que son necesarias para la aplicación del muestreo de Gibbs para el problema de maximización del excedente del consumidor. En primer lugar, es más conveniente para reescribir el modelo como el modo $\Delta_j \boldsymbol{EC}_i + \Delta_j \boldsymbol{p}_i = \Delta_j \boldsymbol{Q}_i \theta + \Delta_j \epsilon_i$. Sea $\boldsymbol{L}$ la raíz de Cholesky de $(\Delta_j \Sigma \Delta_j{}')^{-1}$, entonces la ecuación (8) puede rescribirse como

$$\boldsymbol{L}'\Delta_j \boldsymbol{EC}_i + \boldsymbol{L}'\Delta_j \boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{L}'\Delta_j \boldsymbol{Q}_i \theta + \boldsymbol{L}'\Delta_j \epsilon_i, \quad \boldsymbol{L}'\Delta_j \epsilon_i \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{0}_{(J-1\times 1)}, I_{(J-1\times J-1)}). \tag{7}$$

Nótese que la variable dependiente es en este caso es parcialmente observada. La técnica de aumento de datos sigue siendo necesaria para generar observaciones de $\Delta_j \boldsymbol{EC}_i$, que, como antes, es un vector de una distribución normal truncada. En segundo lugar, y a diferencia del modelo en el espacio de preferencias, no se requieren restricciones de identificación para los elementos de covarianza del término de error en diferencias. Esto es particularmente interesante para definir distribuciones a priori para todos los parámetros del modelo.

- Inicializar las iteraciones con vectores iniciales arbitrarios $\boldsymbol{CS}_i^{(0)}$, $\theta^{(0)}$, y $\Sigma^{(0)-1} = \boldsymbol{L}^{(0)}\boldsymbol{L}^{(0)'}$ en el espacio de los parámetros.
- Para las iteraciones $g \in \{1, \dots G\}$, considerar

    1. Si $y_i = j$, muestrear $\Delta_j \boldsymbol{EC}_i^{(g)}$ a partir de la siguiente distribución normal multivariada truncada:

$$\mathcal{N}(\Delta_j \boldsymbol{Q}_i \theta^{(g-1)} - \Delta_j \boldsymbol{p}_{ij}, \Delta_j \Sigma^{(g-1)} \Delta_j{}')1(\Delta_{jj'}\mathrm{EC}_{ij'} < 0, \forall j' \neq j) \tag{8}$$

2. De lo contrario, muestrear $\Delta_j \boldsymbol{EC}_i$ a partir de la siguiente distribución normal multivariada truncada:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(\Delta_j \boldsymbol{Q}_i \theta^{(g-1)} - \Delta_j \boldsymbol{p}_{ij}, \Delta_j \Sigma^{(g-1)} \Delta_j{}')1(\Delta_{jj'}\mathrm{EC}_{ij'} \\ > \max\{0, \Delta\mathrm{EC}_{i,-j}\}, \forall j' \neq j)\end{aligned} \tag{9}$$

3. Muestrear $\theta^{(g)}$ a partir de la siguiente distribución normal multivariada:

$$\begin{aligned}&\mathcal{N}\big((\check{V}_\theta^{-1}\check{\theta} + (\boldsymbol{L}^{(g-1)'}\Delta_j \boldsymbol{Q})'\boldsymbol{L}^{(g-1)'}\Delta_j \boldsymbol{Q})^{-1}(\check{V}_\theta^{-1} \\ &\qquad + \boldsymbol{Q}'\Delta_j{}'\boldsymbol{L}^{(g-1)}\boldsymbol{L}^{(g-1)'}\Delta_j(\boldsymbol{EC}^{(g)} + \boldsymbol{p})), \\ &(\check{V}_\theta^{-1} + (\boldsymbol{L}^{(g-1)'}\Delta_j \boldsymbol{Q})'(\boldsymbol{L}^{(g-1)'}\Delta_j \boldsymbol{Q}))^{-1}\big),\end{aligned} \tag{10}$$

donde $\check{\theta}$ y $\check{V}_\theta$ son los parámetros de la distribución a priori de la disposición a pagar $p(\theta) \sim \mathcal{N}(\check{\theta}, \check{V}_\theta)$.

4. Muestrear $\Sigma^{(g)}$ a partir de la distribución de Wishart inversa:

$$\begin{aligned}IW\Bigg(\check{\nu} + N, \check{\Sigma} + \sum_{i=1}^{N} \Delta_j\,(\boldsymbol{EC}_i^{(g)} + \boldsymbol{p} - \boldsymbol{Q}_i\theta(g))(\boldsymbol{EC}_i^{(g)} + \boldsymbol{p} \\ - \boldsymbol{Q}_i\theta(g))'\Delta_j{}'\Bigg),\end{aligned} \tag{11}$$

donde $\check{\nu}$ y $\Delta_j\check{\Sigma}\Delta_j{}'$ son los parámetros de la distribución a priori de Wishart inversa $p(\Delta_j\Sigma\Delta_j{}') = IW(\check{\nu}, \Delta_j\check{\Sigma}\Delta_j{}')$. Actualizar la matriz de Cholesky $\boldsymbol{L}^{(g)}$ de Σ^{-1}.

- Puesto que la distribución estacionaria de $\theta^{(G)}$ converge a la verdadera distribución a posteriori de interés, cada muestra $\theta^{(g)}$ puede ser considerada como una extracción aleatoria de la distribución a posteriori conjunta.

6 APLICACIÓN EMPÍRICA

El estimador del modelo de maximización del excedente del consumidor aleatorio se prueba para analizar adopción de vehículos de ultra-bajas emisiones en Canadá. Detalles sobre la recolección de datos y el diseño del experimento preferencias declaradas se pueden encontrar en Horne et al. (2005).

La Tabla 1 presenta las estimaciones puntuales y las estimaciones de los intervalos de credibilidad (límites inferior y superior para niveles de credibilidad al 90 y 95%) de la disposición a pagar por mejoras marginales en ganancias de eficiencia energética (reducción de costos de operación), la densidad de la red de recarga de combustible, el acceso a pistas expresas y potencia del vehículo. Dado que los parámetros de interés del modelo son la disposición a pagar, los intervalos de credibilidad son un resultado directo, evitando todos los problemas que se encuentran para la obtención de medidas de incertidumbre cuando se usa la normalización de la escala.

Tabla 1. Disposición a pagar, elección de vehículos en Canadá

	Valores estimados de DP				
	Est. Puntual	2.5%	5%	95%	97.5%
Reducción en costos de combustible [$/$-mes]	94.78	91.49	94.44	95.51	96.36
Aumento en la disponibilidad de combustible	156.18	75.37	85.71	309.09	376.60
Acceso a pistas expresas	1797.75	74.63	317.46	4909.09	6382.98
Aumento en potencia	307.87	100.00	125.40	701.82	885.11
Pseudo	0.234				

Por ejemplo, la estimación puntual de la disposición a pagar por el aumento de la eficiencia energética es de aproximadamente $95 por la compra de un vehículo que ofrezca una tecnología de propulsión que reduzca en un dólar el gasto mensual en combustible. El límite inferior y superior del intervalo de credibilidad al 95% es de $91 y $96 por el ahorro de un dólar en los gastos mensuales de combustible.

7 CONCLUSIÓN

En este trabajo se ha revisitado el problema de la inferencia econométrica sobre disposición a pagar. La estimación de intervalos de confianza de disposición a pagar no es trivial, ni siquiera para el caso más simple de una especificación lineal de la utilidad para la cual la disposición a pagar es un cociente de parámetros. Por ejemplo, la razón de utilidades marginales – que son asintóticamente normales – es localmente casi no identificada. Con el objetivo de analizar la distribución de heterogeneidad de la disposición a pagar, algunos autores han propuesto una reparametrización no lineal del espacio de parámetros originales de utilidades marginales a un espacio que mide directamente disposición a pagar. En esta reparametrización, una utilidad lineal se transforma a una especificación no lineal para que la disposición a pagar y la utilidad marginal del ingreso se calculen directamente.

En este artículo se propone un método alternativo para transformar los parámetros al espacio de disposición a pagar usando una normalización de la escala que fija la utilidad marginal del ingreso. A pesar de que la normalización de un parámetro es el supuesto estándar de los estimadores semiparamétricos de regresiones para variables dependientes binarias, este procedimiento no ha sido explotado para la inferencia sobre disposición a pagar ni ha sido utilizado para modelos multinomiales.

Al fijar la utilidad marginal del ingreso, en lugar de normalizar un elemento de la matriz de covarianza, los parámetros del modelo representan directamente la disposición a pagar. De hecho, el modelo de elección se reinterpreta como un problema de maximización del excedente consumidor. Como se muestra en este trabajo, la normalización alternativa propuesta es equivalente a la reparametrización no lineal para los modelos GEV. Sin embargo, también se discute que la normalización alternativa difiere de la reparametrización no lineal cuando los términos de error no pertenecen a la familia GEV. En particular, en este artículo se discute el estimador Bayesiano de un modelo probit para modelar la maximización del excedente aleatorio del consumidor. Además, se muestra que la normalización alternativa garantiza la identificación de todos los términos de error. Otro resultado que no se ha analizado en la literatura previa, que está enfocada en las distribuciones de heterogeneidad, es que el modelo de maximización del excedente aleatorio de los consumidores se puede utilizar para la estimación de intervalos de confianza (o credibilidad en el caso Bayesiano) de las disposiciones a pagar. Para ejemplificar y probar el estimador Bayesiano en la práctica, se utilizó microdatos sobre la adopción de bienes duraderos de bajo consumo.

Por último, puesto que el método propuesto transforma la variable dependiente en una medida directa del excedente del consumidor – un resultado que no se obtiene para la reparametrización no lineal, estimadores basados en la normalización alternativa potencialmente se pueden explotar para evaluar mejoras en el bienestar de los usuarios.

Referencias

Albert, J. y S. Chib (1993). Bayesian analysis of binary and polychotomous response data. **Journal of the American Statistical Association** 88:669-679.

Algers, S., Bergström, P., Dahlberg, M., y J. L. Dillén (1998). Mixed Logit Estimation of the Value of Travel Time, Working Paper, Department of Economics, Uppsala University, Uppsala, Sweden.

Balcombe, K., A. Bailey, A. Chalak y I. Fraser (2008). Modifying willingness to pay estimates where respondents mis-report their preferences. **Applied Economics Letters** 15, 327-330.

Balcombe, K., A. Chalak y I. Fraser (2009). Model selection for the mixed logit with Bayesian estimation. **Journal of Environmental Economics and Management** 57, 226-237.

Bolduc, D., Khalaf, L. y Y. Clement (2010). Identification robust confidence set methods for inference on parameter ratios with application to discrete choice models. **Journal of Econometrics**, 147(2), 316-327.

Brownstone, D. (2001). Discrete Choice Modeling for Transportation, in D. Hensher (ed.), **Travel Behaviour Research: The Leading Edge**. Amsterdam: Pergamon, 97-124.

Bunch, D. (1991). Estimability in the multinomial probit model. **Transportation Research Part B: Methodological** 25(1), 1-12.

Cirillo, C. y K.W. Axhausen (2006). Evidence on the distribution of values of travel time savings from a six-week diary. **Transportation Research Part A: Policy and Practice** 40(5), 444-457.

Daly, A.J., S. Hess y K.E. Train (2011). Assuring finite moments for willingness to pay in random coefficients models, **Transportation**, forthcoming.

Dufour, J.M. (1997). Some impossibility theorems in econometrics, with applications to structural and dynamic models. **Econometrica** 65, 1365-1389.

Greene, W. y D. Hensher (2010). Does scale heterogeneity across individuals matter? An empirical assessment of different logit models, **Transportation** 37(3), 413-428.

Hensher, D. y W.H. Greene (2003). The mixed logit model: the state of practice. **Transportation** 30(2), 133-176.

Hess, S., Bierlaire, M., y J.W. Polak (2005). Estimation of value of travel-time savings using mixed logit models. **Transportation Research Part A: Policy and Practice** 39, 221-236.

Hess, S., Train, K.E. y J.W. Polak (2006). On the use of a modified latin hypercube sampling (MLHS) method in the estimation of a mixed logit model for vehicle choice. **Transportation Research Part B**, 40: 147 -163.

Risa Hole, A. y J. Riise Kolstad (2011). Mixed logit estimation of willingness to pay distributions: a comparison of models in preference and WTP space using data from a health-related choice experiments, **Empirical Economics**, DOI 10.1007/s00181-011-0500-1.

Horne, M., Jaccard, M. y K. Tiedemann (2005). Improving behavioral realism in hybrid energy-economy models using discrete choice studies of personal transportation decisions. **Energy Economics** 27(1): 59-77.

Ichimura, H. (1993). Semiparametric Least Squares (SLS) and Weighted SLS Estimation of Single Index Models. **Journal of Econometrics** 58, 71-120.

Jedidi, K., Jagpal, S. y P. Manchanda (2003). Measuring heterogeneous reservation prices for product bundles. **Marketing Science**, 22, 107-130.

Klein, R. W. y R. H. Spady (1993). An Efficient Semiparametric Estimator for Binary Response Models. **Econometrica** 61(2), 387-421.

McCulloch, R.R., Polson, N.G., y P.E. Rossi (2000). Bayesian analysis of the multinomial probit model with fully identified parameters. **Journal of Econometrics**, 99, 173-193.

McCulloch, R., y P. Rossi (2000). Bayesian analysis of the multinomial probit model, in R. Mariano, T. Schuermann, and M. Weeks, eds., **Simulation-Based Inference in Econometrics**, Cambridge University Press, New York.

McFadden, D. (1999). Computing willingness-to-pay in random utility models, in J.R. Melvin, J.C. Moore and R.G. Riezman, eds., **Trade, Theory and Econometrics**, Routledge Studies in the Modern World Economy, Routledge, New York, Chapter 15, 253-274.

McFadden, D. (2001). Economic choices. **American Economic Review**, 91(3), 351-378.

Meijer, E. y J. Rouwendal (2006). Measuring welfare effects in models with random coefficients. **Journal of Applied Econometrics** 21, 227-244.

Revelt, D., y K. Train (1998). Mixed logit with repeated choices: Households' choices of appliance efficiency level. **Review of Economics and Statistics** 4, 647-657.

Sillano ,M., y J. de D. Ortúzar (2005). Willingness-to-pay estimation with mixed logit models: some new evidence. **Environment and Planning** A 37(3), 525-550.

Scarpa, R., M. Thiene, y K. Train (2005). Utility in willingness to pay space: a tool to address confounding random scale effects in destination choice to the Alps, **American Journal of Agricultural Economics** 90(4), 994-1010.

Sonnier, G., A. Ainslie y T. Otter (2007). Heterogeneity distributions of willingness-to-pay in choice models. **Quantitative Marketing Economics** 5(3), 313-331.

Train, K. y G. Sonnier (2005). Mixed logit with bounded distributions of correlated partworths. In R. Scarpa and A. Alberini, editors, **Applications of Simulation Methods in Environmental and Resource Economics**. Kluwer Academic Publishers, Boston, MA.

Train, K. y M. Weeks (2005). Discrete choice models in preference space and willingness to pay space, in R. Scarpa and A. Alberini, eds., **Applications of Simulation Methods in Environmental and Resource Economics**, Kluwer Academic Publishers, Boston, MA.