

Cálculo gráfico de vigas continuas de momento de inercia variable (1)

(Continuación)

El método de cálculo que hemos expuesto para una viga empotrada de momento de inercia variable se puede extender también al caso de viga continua.

En efecto, las vigas continuas de momento de inercia constante se calculan gráficamente con el método de Ritter, vulgarmente conocido con el nombre de método de los «puntos fijos». Este método es aplicable, con modificaciones, al caso de vigas de momento de inercia variable.

El método de Ritter se basa en el principio de la superposición y en ciertas propiedades de los funiculares que representan la elástica de las vigas continuas.

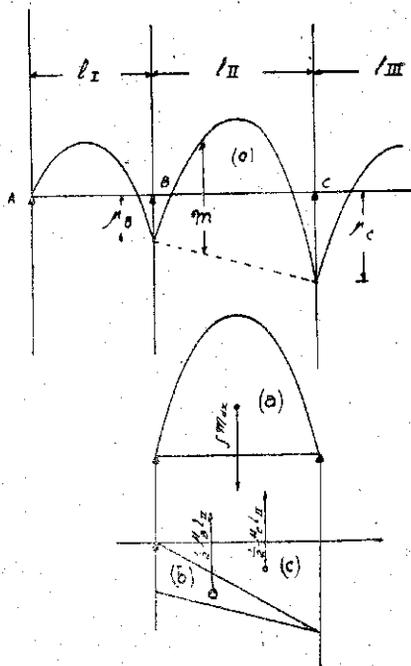


Fig. 6

dependen de los momentos incógnitos de los apoyos.

A) El principio de superposición se aplica descomponiendo el diagrama total (O) de momentos (Fig. 6) que solicitan cada tramo de una viga continua, en el diagrama de momentos positivos (a) o sea los que solicitan cada tramo considerado como simplemente apoyado y los diagramas de momentos negativos (b) y (c) que se generan en los apoyos debido a la continuidad de la viga. Esta descomposición presenta las siguientes ventajas:

1.º Se conoce la magnitud y la línea de acción del peso elástico positivo $\int m dx$, siendo estos elementos independientes de los momentos en los apoyos,

2.º Debido a la forma triangular de los diagramas negativos, sus líneas de acción coinciden con las trisectrices del tramo, su posición es por lo tanto independiente de las cargas y sus magnitudes

(1) Continuación del núm. de Mayo-Junio de 1935.

B) Las propiedades del funicular que permiten determinar los momentos incógnitos son las siguientes. (Fig. 7).

1.º Pasar por los apoyos sin sufrir en ellos inflexión o quebradura (pues no existen resultantes de pesos elásticos en esos puntos).

2.º Los lados contiguos al lado que pasa por el apoyo se cortan siempre sobre una vertical que resulta ser la línea de acción de la resultante de los pesos elásticos negativos, contiguos a dicho apoyo; dicha línea recibe el nombre de *antivertical*.

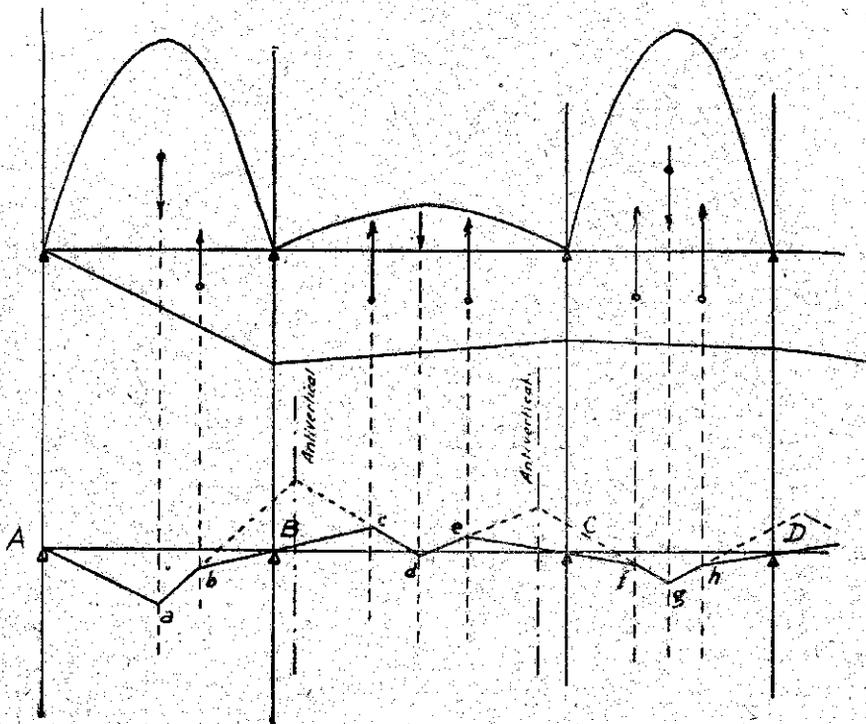


Fig. 7.

Estas dos propiedades se cumplen, cualquiera que sea el sistema de cargas que soliciten a la viga, la distancia polar que se haya tomado para trazar dicho funicular y la escala de pesos elásticos:

3.º Cuando sólo un tramo de la viga se encuentra cargado, los lados del funicular que se encuentran entre las trisectrices, tanto en el tramo cargado como en los descargados, se cortan con la línea de los apoyos en puntos fijos, que se pueden determinar.

Cuando hay varios tramos cargados los lados del funicular que se encuentran entre las trisectrices, pasarán por los puntos fijos únicamente: 1.º en los tramos descargados que se encuentran exteriores a los tramos cargados (I y II; VII y VIII).

2.º Y en los tramos extremos cargados por los puntos i_{III} y d_{VI} , respectivamente (Fig. 8).

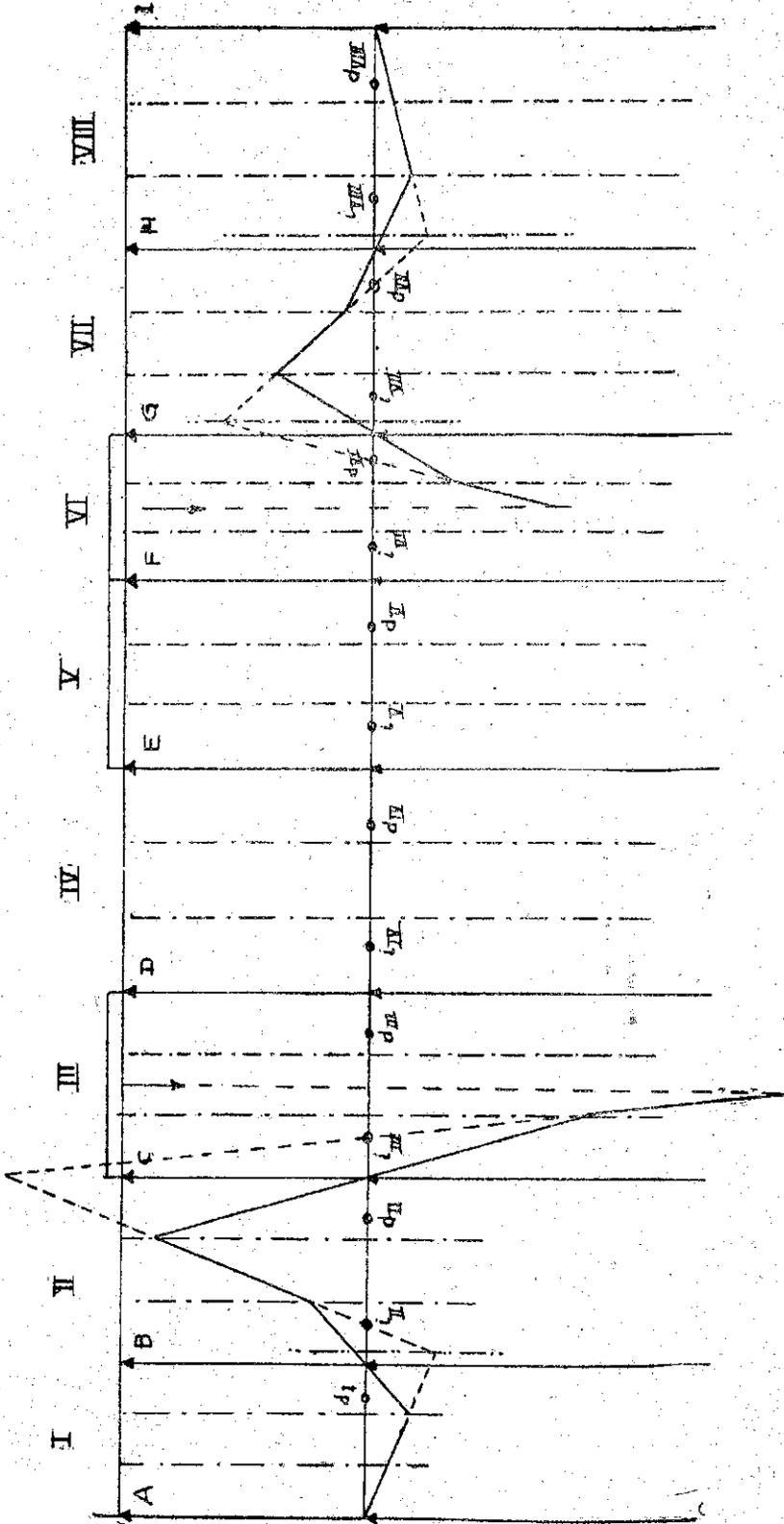


Fig. 8.

Se puede demostrar que todas estas propiedades son también válidas para el caso de vigas de momento de inercia variable, sólo que en este caso los pesos elásticos elementales son $\frac{M_{dx}}{I}$ en vez de ser M_{dx} (ver el caso de la viga empotrada). (Ver fig. 9).

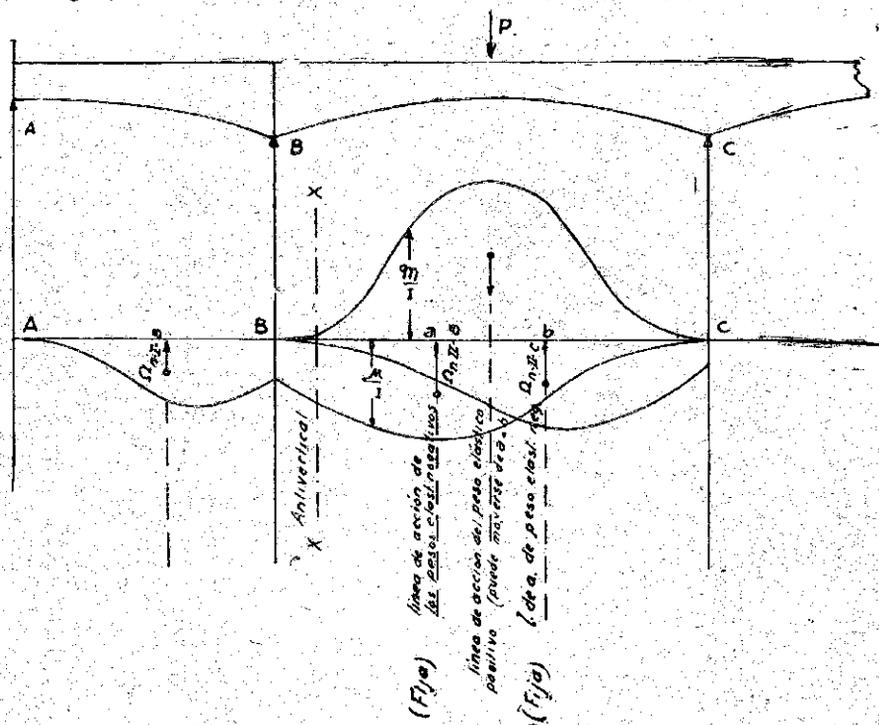


Fig. 9.

A) Principio de superposición aplicado al caso de vigas continuas de I variable.

1.º En cada tramo se conoce la magnitud y la línea de acción del peso elástico positivo. $\int \frac{M_{dx}}{I}$ las que, lo mismo que en el caso de vigas de I constante, son independientes de los momentos en los apoyos.

2.º Se pueden determinar las líneas de acción de los pesos elásticos negativos $\int \frac{M}{dx} I$ en la forma explicada para el caso de la viga empotrada. Estas líneas de acción no coincidirán ahora con las trisectrices como en el caso de la viga de I constante, pero su posición es independiente de las cargas y la magnitud de estos vectores depende únicamente de los momentos incógnitos de los apoyos.

De paso conviene notar que siempre la línea de acción de los pesos elásticos positivos de un tramo, cualquiera que sea el sistema de cargas que obre en él, estará entre las líneas de acción de los pesos elásticos negativos del mismo tramo. La demostración es obvia.

B) Propiedades del funicular:

1.º) Idéntica al caso de I constante.

2.º) La resultante de los pesos elásticos negativos totales Ω_{n-I-B} y Ω_{n-II-B} con respecto a un apoyo (B) tiene una línea de acción determinada $x-x$ que depende únicamente de la luz y de la variación del momento de inercia en los tramos considerados.

En efecto, los valores de Ω_{n-I-B} y Ω_{n-II-B} varían proporcionalmente con el momento negativo en el apoyo B .

Por analogía con la viga de I constante, llamaremos antivertical a dicha línea de acción, haciendo notar, en todo caso, que por depender su posición de la variación de I no se determina en forma tan sencilla como en el caso de la viga de I constante.

3.º) Puntos fijos.—Recordaremos aquí una propiedad general de los funiculares. Supongamos un sistema de vectores $I-II-III-IV$, tracemos un polígono y con los polos en O y O' los dos funiculares correspondientes (Fig. 10).

Se demuestra que los lados homólogos a y a' ; b y b' etc., se cortan sobre una recta AE paralela a la línea de los polos OO' .

En consecuencia, si trazamos otro funicular con polo O'' sobre la recta OO' y cuyo primer lado pase por A , los demás lados homólogos se cortarán también en los puntos B, C , etc., con la recta AE .

En el caso de vigas continuas con apoyo a nivel y para un sistema de carga determinado, todos los funiculares del sistema de pesos elásticos correspondientes que satisfagan la condición de pasar por los apoyos (funiculares de la elástica) deberán cumplir, además, según se acaba de anunciar, con la condición de que sus demás lados homólogos se corten siempre en los mismos puntos y que estos puntos se encuentren sobre la línea de los apoyos.

En consecuencia, el lugar geométrico de los polos de estos funiculares es una recta paralela a la línea de los apoyos.

Es necesario notar que si varía el sistema de cargas, los lados homólogos de los nuevos polígonos funiculares se cortarán: 1.º) en los puntos de apoyo, los que deben pasar por esos puntos; 2.º) los demás lados homólogos se cortarán siempre sobre la línea de los apoyos pero en puntos que, como veremos más adelante, podrán ser o no, los que corresponden al anterior sistema de cargas.*

En el caso particular de encontrarse sólo un tramo cargado, demostraremos que los lados homólogos de todos los funiculares de la elástica, se cortarán en puntos fijos que se encuentran sobre la línea de apoyos, cualquiera que sea el sistema de cargas que soliciten ese único tramo cargado.

Estos puntos fijos serán siempre los mismos, cualquiera que sea el tramo cargado.

En efecto, si trazamos un funicular de la elástica, tomando arbitrariamente su primer lado $A-a$ (fig. 11), el segundo lado, $a-c$ queda determinado por la condición de pasar por el apoyo B , el tercer lado $c-d$ debe cortarse con el primero sobre la antivertical en b ; así se puede llegar hasta el tramo cargado y trazar el lado $f-g$. Más

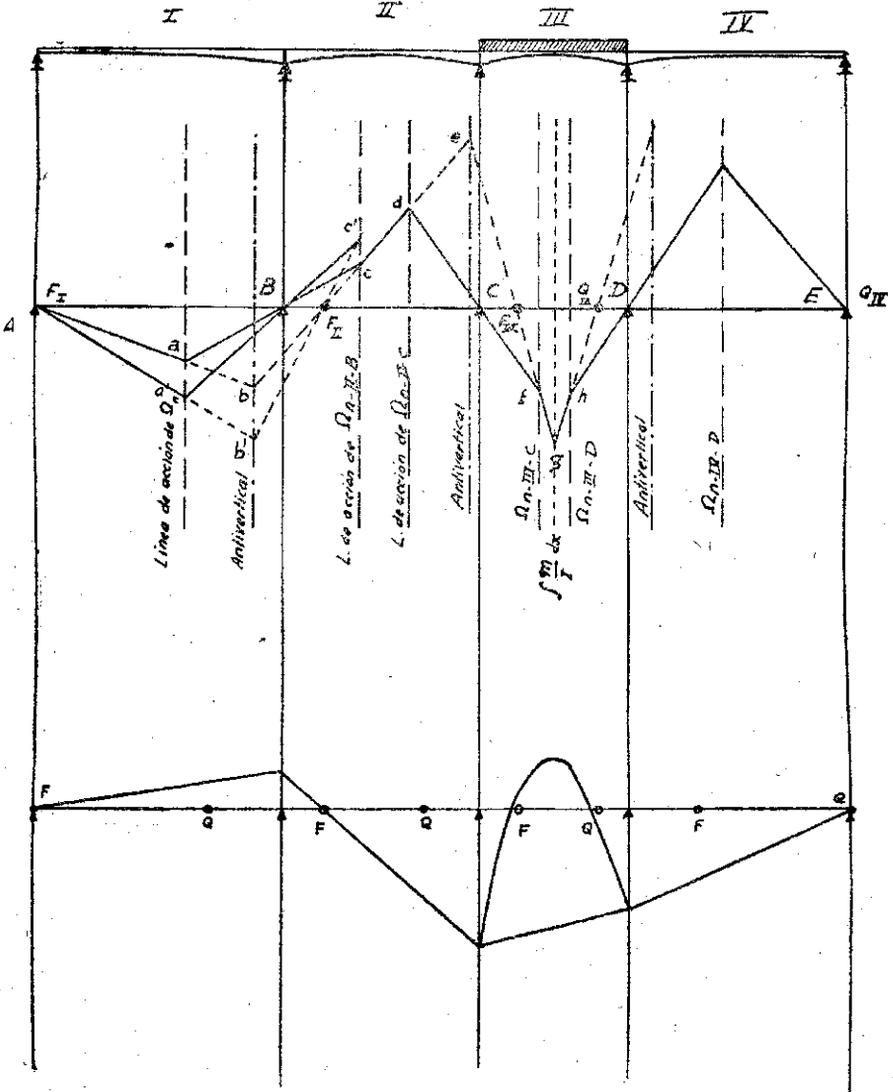
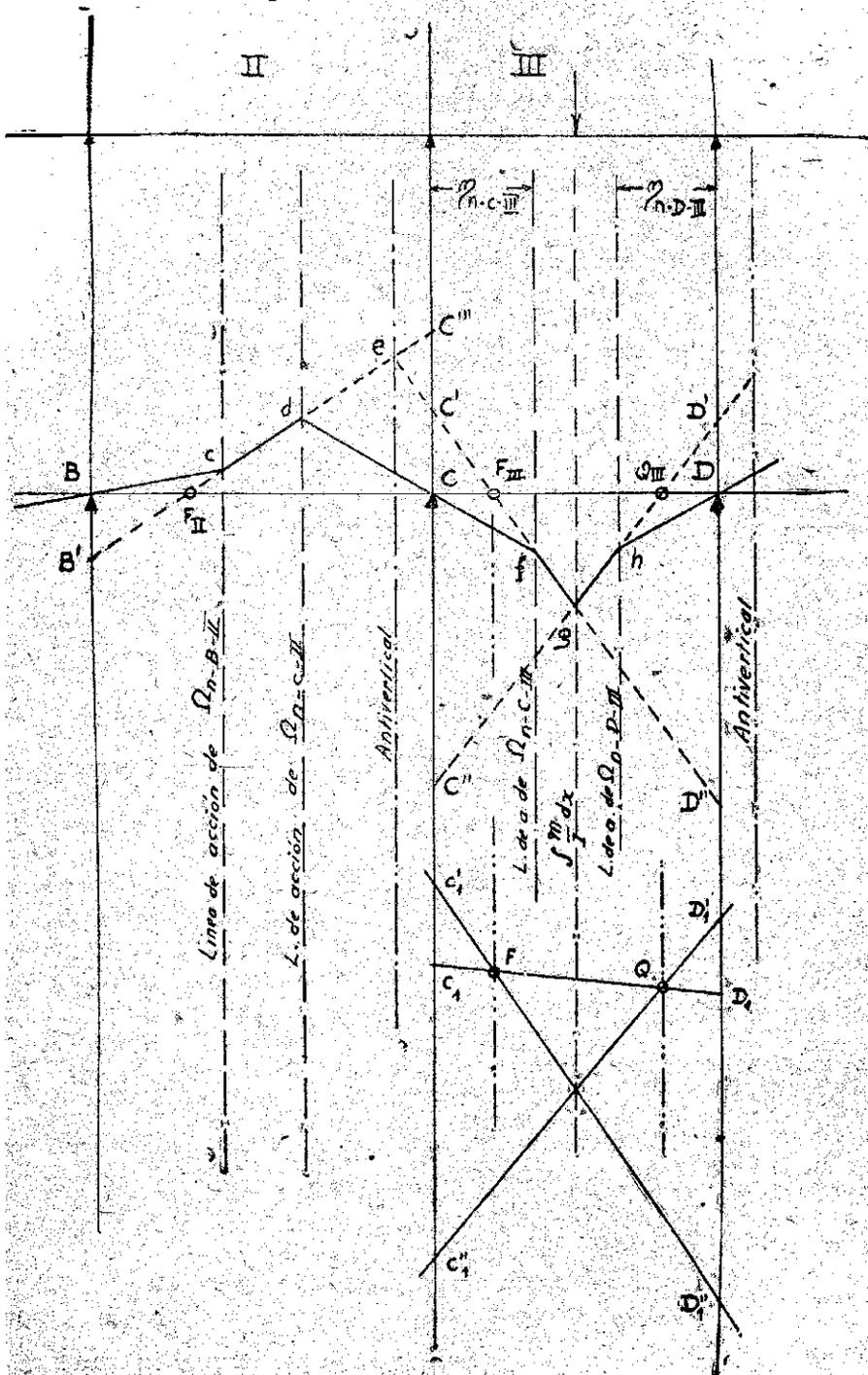


Fig. 11.

si trazamos otro funicular con su primer lado arbitrario $A-a'$, etc. tendremos que los triángulos abc y $a'b'c'$ tienen sus vértices sobre tres rectas paralelas y dos de sus lados homólogos se cortan en puntos fijos A y B luego, en virtud de un teorema de geometría proyectiva, los terceros lados $b-c$ y $b'-c'$ deberán cortarse también en un punto fijo F_{II} que se encuentra en línea recta con A y B . Razonamientos análogos a éste nos llevan a conocer la existencia de dos puntos fijos por tramo, los que se pueden determinar por medio de un trazado sencillo que fluye de la observación de la figura anterior.



TRAZADO DE LA ELÁSTICA Y DETERMINACIÓN DE LOS MOMENTOS DE APOYO PARA
EL CASO DE UN TRAMO CARGADO

Encontradas las líneas de acción de los pesos elásticos negativos Ω_n , las anti-verticales y los puntos fijos, se puede trazar la elástica y determinar los momentos de apoyo cuando está cargado solamente un tramo.

1) *Tramo cargado*.—Consideremos el tramo III de la figura anterior (fig. 12); según una propiedad de los funiculares, las magnitudes CC'' y $D'D''$ miden a cierta escala K el momento del vector $\int \frac{M}{I} dx$ respecto de los apoyos C y D . Análogamente, la magnitud CC' mide el momento del vector $\Omega_{n-c-III}$ respecto del apoyo C y DD' mide el momento del vector $\Omega_{n-D-III}$ respecto del apoyo D .

En consecuencia, $CC' = K \cdot \Omega_{n-c-III} \cdot \eta_{n-c-III}$, siendo K el coeficiente de escala de momentos de pesos elásticos y $DD' = K \cdot \Omega_{n-D-III} \cdot \eta_{n-D-III}$; por otra parte, $\Omega_{n-c-III} = \int_0^{l-x} \frac{I-x}{I_x \cdot l} dx$, valor que introducido en la ecuación anterior nos da

$$cc' = K \cdot \eta_{n-c-III} \cdot \mu_c \int_0^{l-x} \frac{l-x}{I_x \cdot l} \cdot dx$$

o sea, CC' representa a una cierta escala K_{III} el momento en el apoyo C ; $\mu_c = K_{III} CC'$ pues los valores $\eta_{n-c-III}$ e integral $\int_0^{l-x} \frac{l-x}{I_x \cdot l} dx$ son constantes características del tramo, como lo demostramos para el caso de la viga empotrada de l variable.

En consecuencia, si se adopta una escala arbitraria K para medir los momentos de los pesos elásticos conocidos (los positivos en este caso) $C'C''$ y $D'D''$ se obtiene inmediatamente un sistema de escalas K_I, K_{II}, K_{III} , etc., que nos permiten medir el valor de los momentos de flexión en los apoyos de los tramos I, II, III , etc., respectivamente, de manera que $\mu_c = K_{III} CC' = K_{II} CC''$.

Las rectas $C'D''$ y $D'C''$ se llaman «líneas cruzadas» y gozan de la propiedad de que si se toman sobre las verticales de los apoyos las magnitudes $C_1'C_1'' = C'C''$ y $D_1'D_1'' = D'D''$ y se trazan las líneas cruzadas, éstas se cortan sobre la línea de acción de $\int \frac{M}{I} dx$ y uniendo los puntos F y Q intersección de ellas con las verticales que pasan por los puntos fijos se obtiene la recta C_1D_1 que determina en las verticales de los apoyos los segmentos C_1C_1' y D_1D_1' que son iguales respectivamente a CC' y DD' . Su demostración geométrica no tiene interés.

El método para obtener el diagrama de momentos del tramo cargado una vez determinados los puntos fijos, es pues muy sencillo; basta calcular numéricamente

$\int \frac{M}{I}$

C_1'' y $D_1'D_1''$ y por el procedimiento que acabamos de exponer determinar los valores de μ_C y μ_D .

II) *Tramos descargados*.—Considerando el tramo II de la misma figura, que se encuentra a la izquierda del cargado, tenemos que cc''' mide a la misma escala K_{II} el momento del vector Ω_{n-C-II} respecto del apoyo C y BB' el momento Ω_{n-B-II} respecto de B.

Según lo expuesto en el caso anterior $\mu_C = K_{II} \cdot CC'''$ y $\mu_B = K_{II} \cdot BB'$.

En consecuencia, el diagrama de momentos en los tramos descargados es una recta que pasa por los puntos fijos F de la izquierda o Q de la derecha, según que el tramo considerado se encuentre a la izquierda o a la derecha del tramo cargado. Ver abajo de la fig. 11).

Para calcular por este método una viga continua con todos sus tramos cargados basta determinar separadamente los momentos en los apoyos considerando los ramos sucesivamente cargados. Tendremos así 1.º únicamente el tramo I cargado; resultan en los apoyos momentos μ_B^I ; μ_C^I ; μ_D^I , etc. 2.º únicamente el tramo II cargado, resultan momentos μ_B^{II} ; μ_C^{II} ; μ_D^{II} , etc. 3.º únicamente el tramo III cargado resultan momentos μ_B^{III} ; μ_C^{III} ; μ_D^{III} , etc.

Es evidente que los momentos correspondientes a la viga totalmente cargada serán en cada apoyo la suma algebraica de los anteriores.

(Continuará).