Carlos Olavarrieta Valdivieso

y Luis Joannon Infante

Cálculo gráfico de vigas continuas de momento de inercia variable

La elástica de una estructura cualquiera se puede considerar siempre como un funicular de un cierto sistema de cargas ficticias que solicitan dicha estructura.

Algunos autores llaman con mucha propiedad «pesos elásticos» a esas cargas ficticias.

En consecuencia, para obtener la elástica de una estructura basta determinar ese sistema de cargas ficticias y trazar cualquiera de sus funiculares que cumplan, además, con las condiciones de ligazón de la estructura. Cada uno de esos funiculares representará la elástica a una cierta escala.

Entendemos por condiciones de ligazón las obligaciones que imponen a la elástica los sistemas de apoyos (condición de pasar por puntos dados y tener tangentes de direcciones determinadas) y las ligazones que existen entre las diferentes piezas de la estructura (indeformabilidad de los ángulos en los marcos rígidos, etc.).

En el caso de vigas de alma llena, se demuestra que los pesos elásticos elementales que se suponen obrando sobre la viga, son en cada punto las áreas elementales de momentos de flexión $M.dx$ divididas por los momentos de inercia I de cada sección (siempre que el coeficiente de elasticidad E del material sea constante, único caso que se presenta en la práctica). Trazando el funicular de estos pesos elásticos con una distancia polar igual a E, se obtiene, a una cierta escala, las ordenadas de la elástica en los diferentes puntos de la viga.

Por ejemplo, en el caso de una viga empotrada en un extremo y apoyada en el otro, de momento de inercia variable, tendremos:

μ_A momento de empotramiento
μ_x momento negativo en un punto de abscisa x
m el momento de la viga simplemente apoyada equivalente

el momento de flexión M_x en un punto cualquiera x de la viga será:

$$M_x = m_x - \mu_A \frac{l-x}{l}$$

en consecuencia, el peso elástico elemental N_w que obra en esta sección será:

$$N_w = \frac{M_x \cdot \Delta x}{I_x} = \frac{m_x \cdot \Delta x}{I_x} - \frac{\mu_A \frac{l-x}{l} \cdot \Delta x.}{I_x}$$

Para mayor claridad y al mismo tiempo por ser fundamental para este sistema de cálculo, separaremos los pesos elásticos correspondientes a los momentos de flexión del sistema equivalente (estáticamente determinado; momentos positivos en este caso) de los correspondientes a los momentos incógnitos (negativos en este caso).

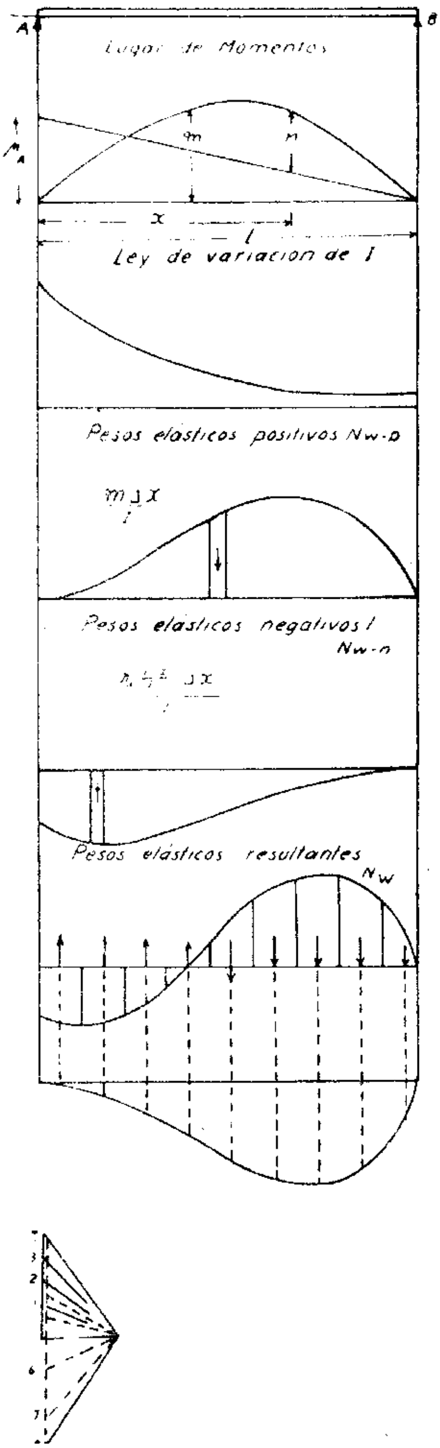
tendremos así: $N_w = N_{w.p} - N_{w\text{-}n}$.

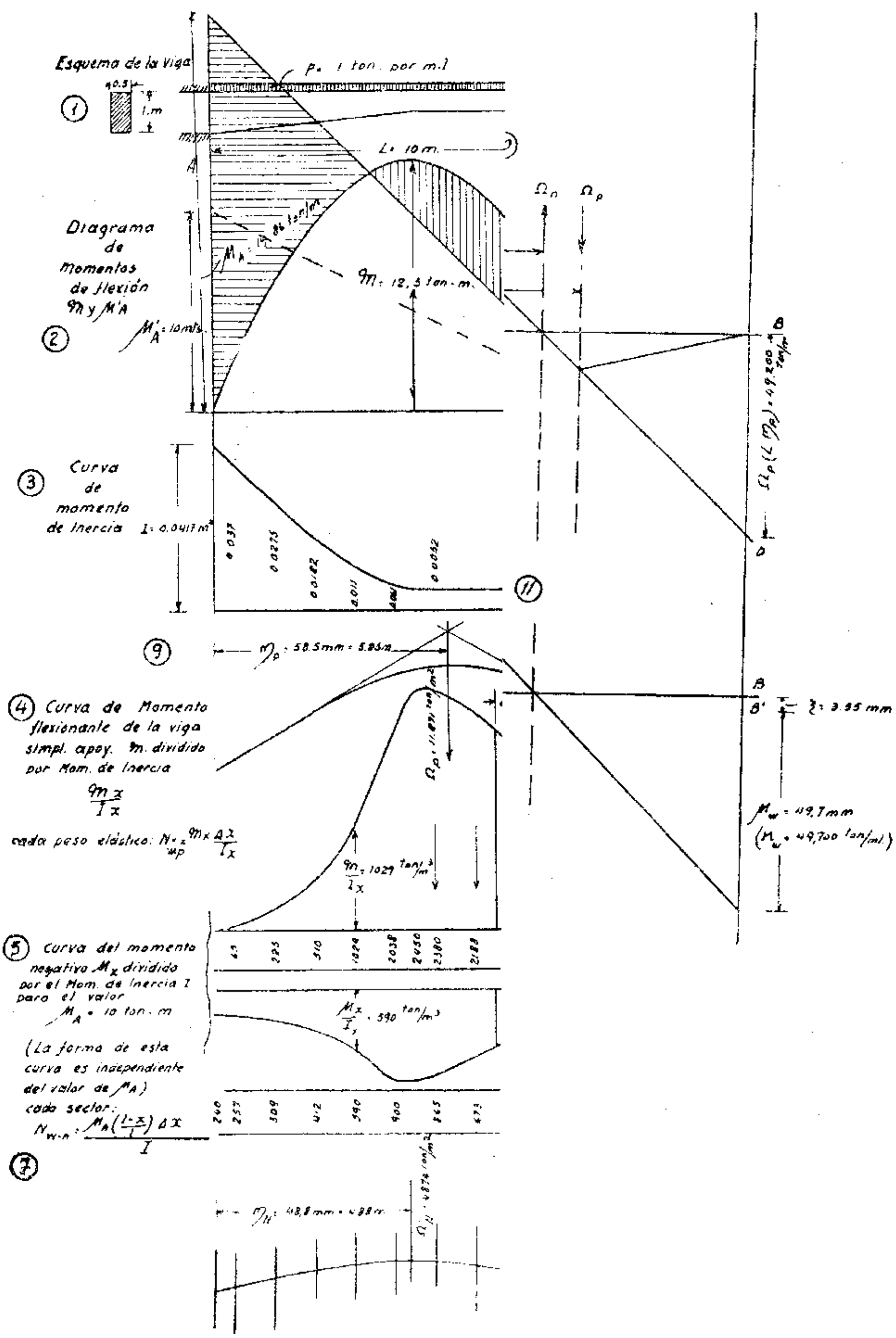
(tomando en cuenta los signos)

$$N_{wp} = \frac{m_x \cdot \Delta x}{I_x}; \quad N_{wn} = \frac{\mu_A \frac{(l-x)}{l} \cdot \Delta x}{I_x}$$

En este caso, en que se trata de determinar la elástica y no el momento de empotramiento, no hay inconveniente en hacer la suma algebraica de los pesos elásticos correspondientes a una misma vertical y reemplazar los dos diagramas por uno solo, como se indica en la figura; tendremos así los pesos elásticos *1, 2, 3, 4, 5, 6, 7* y *8*.

Llevando sobre una vertical estas magnitudes a una cierta escala, escogiendo a escala una distancia polar E y colocando convenientemente el polo para obtener que el funicular cumpla inmediatamente con las condiciones de apoyo, sin tener que recurrir a un segundo trazado para enderezarlo (en nuestro caso basta fijarse que el primer lado, por la condición de empotramiento, debe ser horizontal) y trazando el funicular correspondiente a dicho polígono, obtendremos a una cierta escala la elástica de la viga.





Esquema de la viga
① 0.5 1.m
p = 1 ton. por m.l
L = 10 m.
Diagrama de Momentos de flexión M y M'A
② M'A = 10 mts.
M = 12.5 ton.-m.
Ωn Ωp
B
D
③ Curva de momento de Inercia I = 0.0417 m⁴
0.037
0.0275
0.0182
0.011
0.0052
⑪
⑨ Mp = 58.5 mm = 5.85 m.
④ Curva de Momento flexionante de la viga simpl. apoy. M dividido por Mom. de Inercia
M x / I x
cada peso elástico: N = Mx Δx / Ix
M / I x = 1029 ton/m³
B'
ζ = 3.55 mm
Mw = 49.7 mm
(Mw = 49,700 ton/ml.)
63
225
510
1024
2038
2450
2380
2188
⑤ Curva del momento negativo Mx dividido por el Mom. de Inercia I para el valor MA = 10 ton.m
Mx / Ix = 590 ton/m³
(La forma de esta curva es independiente del valor de MA)
cada sector: N = MA((l-x)/l) Δx / I
240
257
309
412
590
900
565
473
⑦
MII = 48.8 mm = 4.88 m.
ΩII = 4874 ton/m²

Se podrá notar que hemos dado por conocido el momento de empotramiento; en realidad, por este procedimiento se puede también determinar. Indicaremos brevemente el camino que hay que seguir, aprovechando al mismo tiempo para hacer un ejemplo numérico y dejar así establecida la cuestión de escalas.

Sea la misma viga que hemos analizado, de las características y solicitación que se indica en la figura N.º 2.

Tendremos: 1) Momento de la viga simplemente apoyada:

$$m = \frac{1}{8} pl^2 = 12{,}5 \text{ toneladas metro}$$

Los momentos de inercia en las diferentes secciones valdrán:

apoyo A	$=0{,}0417$ m⁴
a 1,50 m. de A	$=0{,}0274$ m⁴
a 3,00 m. de A	$=0{,}0143$ m⁴
al centro y en apoyo B	$=0{,}0052$ m⁴.

En la figura adjunta hemos dibujado los gráficos de mayor interés (ver N.os 1 al 5). Es preciso notar, al trazar las curvas de $\frac{m_x}{I_x}$ y de $\frac{\mu_x}{I_x}$ los siguientes puntos:

1.º El valor de m en cada punto es conocido (trazando gráfica o analíticamente la parábola).

2.º La forma de la curva $\frac{m}{I}$ depende de la posición de las cargas en la viga, pues la forma del diagrama del momento depende de ellos (parabólico en caso de carga uniforme rep.; triangular con una carga concentrada; poligonal en caso de varias cargas, etc.).

3.º Como conocemos m conocemos totalmente el diagrama de $\frac{m}{I}$; podemos determinar el valor elemental $N_{w\text{-}p}$, el valor total del peso elástico o resultante $\Sigma N_{w\text{-}p} = \Sigma \frac{m}{I} \cdot \Delta x = \Omega_p$ y su línea de acción.

4.º En cambio, el valor del momento de empotramiento μ_A nos es desconocido y, por lo tanto, el momento negativo en un punto cualquiera μ_x, también.

5.º Pero la forma de la curva $\frac{\mu_x}{I_x}$ no depende de la posición de las cargas en la viga, cualquiera que ésta sea, siempre el diagrama de momentos negativos será triangular, de manera que la línea de acción del «peso elástico negativo» total $\Sigma N_{w\text{-}n} = \Omega_n$ queda determinado de una vez para cualquier valor de μ_A.

En efecto, llamando η la abscisa de dicha línea de acción, tendremos, tomando momento de los pesos elásticos elementales respecto del apoyo A

$$\int_0^l \frac{\mu_A \frac{l-x}{l}}{I_x} x \cdot dx = \Omega \cdot \eta$$

Por otra parte:

$$\int_o^l \frac{\mu_A \dfrac{l-x}{l}}{I_x} \cdot dx = \Omega$$

Pero μ_A no varía a lo largo de l, es constante para cada caso, de modo que podremos sacarlo afuera del integral; si al mismo tiempo dividimos una expresión por otra, tendremos:

$$\frac{\mu_A \displaystyle\int_o^l \frac{l-x}{l\,I_x} \cdot x \cdot dx}{\mu_A \displaystyle\int_o^l \frac{l-x}{l\,I_x} \cdot dx} = \frac{\Omega \cdot \eta}{\Omega} = \eta$$

independiente de μ_A.

En consecuencia, bastará adoptar para el cálculo de η_n un valor arbitrario de μ_A que para comodidad del dibujo y del cálculo se adoptó $\mu_A = 10$ toneladas metro Para evitar confusiones el peso elástico total correspondiente a $\mu_A = 10$ toneladas-metro lo designaremos por Ω'_n para distinguirlo de Ω_n que corresponde al valor real de μ_A que es nuestra incógnita.

Determinemos las abscisas η_p y η_n de las líneas de acción de las resultantes: Los pesos elásticos elementales N_{w-p} y N_{w-n} tienen en nuestro caso en que hemos tomado $\Delta x = 1$ metro, el mismo valor numérico de $\frac{m}{I}$ y $\frac{\mu}{I}$ respectivamente; pero, expresados en toneladas metros cuadrados en vez de tonelámetros cúbicos en que quedan medidos estos últimos.

Los polígonos N.^{os} 6 y 8 y sus funiculares correspondientes N.^{os} 7 y 9 nos dan las posiciones de las líneas de acción de los vectores Ω_p y Ω_n:

$\eta_p = 5{,}85$ metros
$\eta_n = 4{,}88$ »

Con estos datos podemos determinar el momento efectivo μ_A en el apoyo.

En efecto, si suponemos resuelto el problema y trazamos el funicular de los pesos elásticos reales Ω_p y Ω_n tendremos que, por existir empotramiento en el apoyo A la tangente a la elástica en ese punto es horizontal, luego el lado 1 del polígono funicular debe trazarse horizontal, el lado 3 debe pasar por el apoyo B. (Condiciones de apoyo): El lado 2 prolongado determinará sobre las verticales de los apoyos los puntos a y b.

De acuerdo con la propiedad de los funiculares, tendremos en Bb el momento de Ω_p respecto de $B = \Omega_p\ (l-\eta_p) = Bb$ y en Aa el momento Ω_n respecto de $A = \Omega_n \eta_n = = Aa$.

En consecuencia, como nos es conocido Ω_p, η_p y η_n podemos, llevando en la vertical que pasa por B el valor $\Omega_p\ (l-\eta_p)$ y uniendo b con C obtener $Aa = \Omega_n \cdot \eta_n$ a la misma escala a que se tomó el valor $\Omega_p\ (l - \eta_p)$ tendremos así conocido el valor de $\Omega_n = \dfrac{Aa}{\eta_n}$.

En nuestro caso $\Omega_p\ (l - \eta_p) = 11{,}871 \times 4{,}15 = 49{,}200$ toneladas metros; del gráfico N.º 10 se obtiene el valor $\Omega_n \cdot \eta_n = 47{,}200$ toneladas metros, de donde $\Omega_n = \dfrac{47{,}200}{4{,}88} =$ $= 9{,}680$ toneladas metros cuadrados, valor real del peso elástico negativo total Ω_n correspondiente al valor del momento negativo μ_A que efectivamente se produce en la viga.

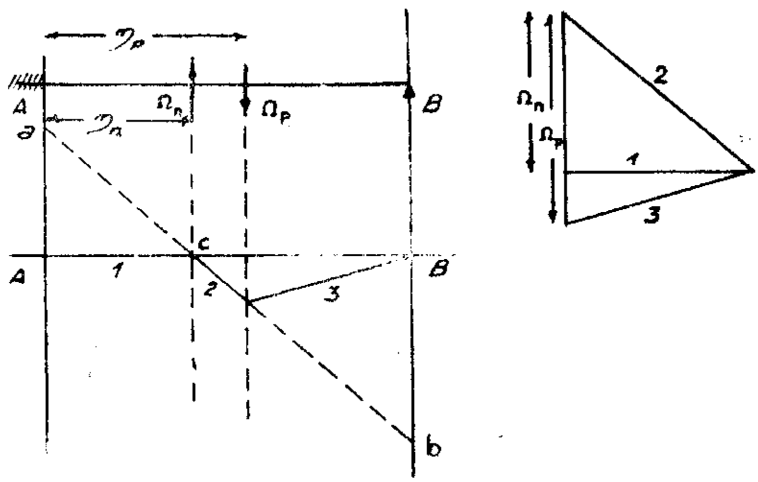


Fig. 3

Para obtener el valor de μ_A bastará la razón:

$$\frac{\Omega_n}{\Omega'_n} = \frac{\mu_A}{\mu'_A}$$

siendo

$$\mu'_A = 10 \text{ ton. m.}$$
$$\Omega'_n = 4{,}874 \text{ ton/m}^2$$
$$\Omega_n = 9{,}680 \text{ ton/m}^2$$

de donde: $\mu_A = \dfrac{9{,}680}{4{,}874} \times 10 = 19{,}86$ ton. m.

DISCUSIÓN DE LAS ESCALAS

Adoptaremos desde un principio las siguientes normas:
medidas en el depurado, siempre en mm.
fuerzas, en toneladas.
longitudes, en metros.

Y designaremos siempre con letras mayúsculas los valores reales (expresados en metros, metro ton., etc.), con letras minúsculas correspondientes, los coeficientes de escalas y por las letras griegas correspondientes, las magnitudes medidas en mm. en el depurado.

Ejemplo 1.—Para aclarar las ideas, determinaremos la escala de momentos conocidas, las de longitudes y de fuerzas:

Sea:	Escala de fuerzas....	1 mm. = f. toneladas,	conocida.
	» » longitudes.	1 mm. = l. metro	conocida.
	» » momentos..	1 mm. = m. m–ton.	desconocida.

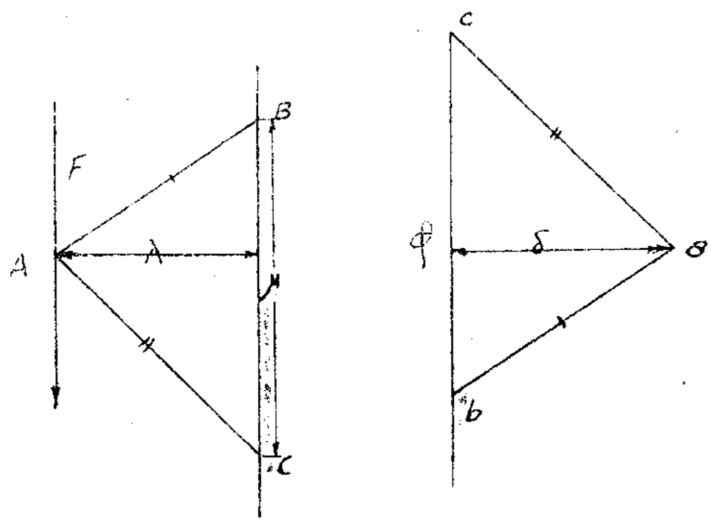


Fig. 4

Tendremos que la fuerza F (en toneladas) es igual a la magnitud φ medida en mm. por el coeficiente de escalas de fuerzas f.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{o sea}\ldots\ldots\ldots\ldots & F=\varphi\cdot f \\ \text{análogamente una longitud} & L=\lambda\cdot l \\ \text{y un momento}\ldots\ldots & M=\mu\cdot m \end{array}\right\} \quad (1)$$

$$\text{además por definición}\ldots\ldots \quad M=F.\,L \qquad (2)$$

Supongamos trazado el polígono de las fuerzas F en bc.
una distancia polar δ mm.
y en ABC su funicular correspondiente.

Tendremos por semejanza de triángulos:

$$\mu = \frac{\varphi \cdot \lambda}{\delta}$$

y reemplazando sus valores sacados de (1):

$$\frac{M}{m} = \frac{F.\,L}{f.\,l.\,d}$$

y combinando con la relación fundamental (2) queda:

$$m = f.\,l.\,d.$$

O sea, que la escala de momentos m es igual a la escala de fuerzas f multiplicada por la escala de longitudes l y por la distancia polar d medida por convención en mm.

Ejemplo 2.º—a) Determinemos en nuestro problema la escala de momentos de pesos elásticos m y de las ordenadas y de la elástica conocida la escala n de los pesos elásticos; la escala l de las longitudes y la escala e a la cual está representada en el dibujo por ε como distancia polar, el coeficiente de elasticidad E, tendremos:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{coeficiente de elasticidad}\ldots & E = \varepsilon \cdot e. \\ \text{longitudes}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & L = \lambda \cdot l. \\ \text{pesos elásticos}\ldots\ldots\ldots\ldots & N_w = v_w \cdot n_w \\ \text{momento de pesos elásticos}. & M_w = \mu_w \cdot m_w \\ \text{ordenadas de las elásticas}\ldots & Y = \xi \cdot y \end{array}\right\} \quad (1)$$

$$\text{además por definición}\ldots\ldots \quad M_w = N_w \cdot L \qquad (2)$$

$$Y = \frac{N_w \cdot L}{E} \qquad (3)$$

Supongamos trazado el polígono de los pesos elásticos N_w en bc.

Tomando como distancia polar E que llevado a su escala queda representado por ε mm. tendremos, por semejanza de triángulos:

$$\mu_w = \frac{v_w \cdot \lambda}{\varepsilon}$$

e introduciendo los valores de (1) (salvo para ε):

$$\frac{M_w}{m_w} = \frac{N_w \cdot L}{n_w \cdot l \cdot \varepsilon}$$

e introduciendo los valores de (2)

$m_w = n_w \cdot l \cdot \varepsilon$ (4) que nos da la escala de los momentos de los pesos elásticos cuando se ha tomado una distancia polar arbitraria.

Si en cambio queremos obtener la escala y de las ordenadas de la elástica, de la semejanza de triángulos, obtendremos:

$$\xi = \frac{\nu_w \cdot \lambda}{\varepsilon}$$

e introduciendo los valores de (1):

$$\frac{Y}{y} = \frac{N_w \cdot L \cdot e}{n_w \cdot l \cdot E}$$

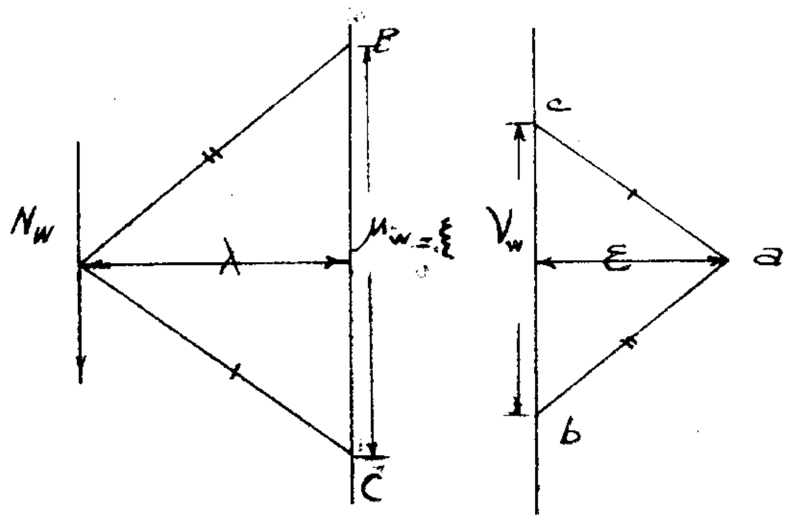


Fig. 5

y tomando en consideración la ecuación (3):

$$\frac{l}{y} = \frac{e}{n_w \cdot l} \qquad \text{o sea:} \qquad y = \frac{n_w \cdot l}{e} \tag{5}$$

De esta última ecuación se puede ver que si la escala de los pesos elásticos n_w es igual a la escala del coeficiente de elasticidad e las ordenadas de la elástica quedan medidas a la escala de longitudes.

b) En el caso en que hayamos adoptado una escala arbitraria m_w para los momentos de los pesos elásticos (como es el caso de nuestro ejemplo numérico) y se trata de determinar la escala de las ordenadas de la elástica, conocido el módulo de elasticidad del material $E = 1.400,000$ toneladas metros cuadrados (concreto), tendremos, reemplazando en (4) el valor de ε sacado de (1):

$$m_w = n_w \, l \cdot \frac{E}{e}$$

de donde

$$\frac{n_w}{e} = \frac{m_w}{l\,E}$$

reemplazado este valor en (5),

$$y = \frac{m_w}{E} \text{ en nuestro ejemplo } \begin{aligned} m_w &= 1000 \\ E &= 1.400.000 \end{aligned}$$

luego

$$y = \frac{1000}{1.400.000} = \frac{1}{1.400} \text{ metros, o sea, } 1 \text{ mm.} = \frac{1}{1.400}$$

o sea 1 mm. del depurado representa $0,71$ mm. de deformación real.

CASO EN QUE EL APOYO B ESTÁ SUJETO A SENTAMIENTOS ELÁSTICOS

Este caso muy frecuente en la práctica, en el cual el punto B se apoya sobre una viga, se puede resolver fácilmente por aproximaciones sucesivas con este método.

En efecto, conocido el valor de μ_A podremos determinar la reacción R_B, y, por lo tanto, la flecha en el punto B, que tomará bajo esta carga la viga que le sirve de apoyo.

Sea BB' la flecha Y; supongámosla igual a 5 mm. llevándola a la escala de ordenadas de la elástica que acabamos de determinar, resulta $\xi = 5 \times 0,71 = 3,55$ mm.; copiando (figura 11) a partir de B' el valor del momento de los pesos elásticos positivos $\Omega_p (L - \eta_p) = M_w = 49.700$ tonelada metro, obtendremos en AA' el nuevo valor del momento de los pesos elásticos negativos $\Omega''_n \cdot \eta_n = 50,5$ mm., o sea $=$ $50,500$ tonelada metro, de donde el valor de:

$$\Omega''_n = \frac{50,500}{4,88} = 10,550$$

y el momento μ''_A en el apoyo será:

$$\mu''_A = \frac{10,550 \times 10}{4,874} = 21,60 \text{ ton-m.}$$

El descenso del apoyo B ha significado por lo tanto un aumento del momento de empotramiento de $21,60 - 19,86 = 1,74$ tonelada metro.

Conocido el nuevo valor del momento de empotramiento, sería necesario determinar la nueva reacción B y por lo tanto la nueva flecha que tomaría la viga de apoyo.

En nuestro ejemplo la variación del momento de empotramiento fué suficientemente pequeña (menor de un 10%) como para considerar que la nueva flecha diferirá muy poco de la anteriormente calculada, el nuevo tanteo se hizo, pues, innecesario.

(Continuará).