PUENTES DE CONCRETO CON BÓVEDAS

A TRIPLE ARTICULACION

PROYECTADOS PARA EL FERROCARRIL EN CONSTRUCCION DE ALCONES A PICHILEMU

Seccion: paradero del "Cardonal" a túnel del "Arbol"

POR

JERARDO ATEAGA A.,

Injeniero Civil.

(*Continuacion*)

3.—CÁLCULOS DEL ARCO DE PUENTE A TRIPLE ARTICULACION

Empuje.—Reacciones verticales.—Curva de presion.—etc., etc.

Calcularemos estos elementos para las tres formas mas simples de solicitacion a que pueden estar sometidas las bóvedas en la práctica:

a).—Carga permanente uniformemente repartida, segun la horizontal, en toda la luz.

b).—Carga aislada permanente en un punto cualquiera de la luz.

c).—Sobrecarga móvil, uniformemente repartida—segun la horizontal—cubriendo i descubriendo gradualmente la luz.

La primera forma *(a)* representa la solicitacion de los elementos de la via *(rieles, durmientes, lastre)*, la *faja del relleno* de los tímpanos con el espesor que tiene en la clave, i *parte del peso* mismo de la bóveda. La segunda *(b)* es una de las fuerzas en las cuales puede descomponerse la carga no uniformemente repartida *(resto del relleno i de la bóveda)*. La tercera *(c)*, es *un tren* salvando la luz. Sabemos la significacion condicional de esta sobrecarga uniformemente repartida para las vigas rectas i arcos, que en el caso de las bóvedas tiene espresion mas real por la interposicion de la capa elástica de lastre i relleno.

Supondremos para todos los cálculos, que el eje lonjitudinal—o fibra media—del arco es una cualquiera de las curvas simples que se emplean (arco de círculo, elipse, parábola), pero simétrica respecto a la vertical de la clave i con arranques a nivel, que son casi esclusivamente los únicos casos prácticos.

Advertiremos desde luego, que si entramos en las particularidades de los cálculos es por no haberlos encontrado con todo detalle i órden en los testos i revistas, i creyendo facilitar el estudio. Trataremos de llegar a las ecuaciones finales con los símbolos a que muchos nos hemos acostumbrado desde los cursos universitarios.

a).—Carga perm. unif. rep.—segun la horiz.—en toda la luz. (fig. 3)

Reacciones verticales R_1 i R_2—*Empuje* Q.—Sea $A_1 C A_2$ la fibra media de un arco. Hemos visto que los centros de articulacion A_1, C i A_2 son puntos forzosos de la curva de presiones, por lo cual en las secciones de arranques i de clave solo hai compresion simple. Quiere decir esto, que si tomamos los momentos de todas las fuerzas (incluso reacciones) comprendidas entre dos articulaciones cualesquiera, al rededor de una de ellas, su suma aljebráica será *cero.*

Tomándolos para A_2 entre A_1 i A_2, se tiene:

$$2 p l^2 - 2 l R_1 = 0,$$

i de aquí:

$$R_1 = \frac{p l}{2}$$

Tomándolos para A_1 entre A_2 i A_1:

$$2 l R_2 - 2 p l^2 = 0,$$

de donde

$$R^2 = \frac{p l}{2}$$

En estas ecuaciones no figura Q, porque su direccion pasa por A_1 A_2. Resulta que ambas reacciones son iguales entre sí i a la mitad de la carga total pl, lo que se podía prever por razon de simetría, como en el caso de la viga recta sobre dos apoyos.

Los momentos para C, entre A_1 i C dan:

$$\frac{p l^2}{2} + Q f - R_1 l = 0;$$

reemplazando R_1 por su valor anterior i despejando Q:

$$Q = \frac{p l^2}{2 f}$$

Pudo tambien haberse determinado este mismo valor, entre A_2 i C, reemplazando R_2 por su valor.

Curva de presion.

Así como en los puntos de articulacion el momento de flexion es cero, así tambien será en cualquier otro punto de la curva de presion Supongamos que $A_1 C A_2$ sea esta curva i $M (x, y)$ un punto de ella. Para tener su ecuacion nos bastará espresar aljebráicamente que la suma de los momentos de todas las fuerzas comprendidas entre un estremo (A_1 por ej.) i M, tomados al rededor de este punto, es cero. Se tiene

$$p(l-x)\frac{l-x}{2} + Q(f-y) - R_1(l-x) = 0;$$

reemplazando Q i R_1 por sus respectivos valores,

$$p\frac{(l-x)^2}{2} + \frac{p\,l^2}{2f}(f-y) - \frac{p\,l}{2}(l-x) = 0;$$

i despejando a y,

$$y = \frac{f}{l^2}x^2$$

Resulta la ecuacion de una parábola del tipo $y = \frac{1}{2c}x^2$ cuyo parámetro es $2c = \frac{l^2}{f}$, con vértice en el oríjen de las coordenadas(articulacion (C) porque solo hai término en x^2, i de eje vertical—el de las y—por ser esta la variable que figura de primer grado en la ecuacion. Como el parámetro no depende sino de la luz i flecha del arco, resulta que la fibra media puede ser una cualquiera de las curvas empleadas en la práctica, sin dejar de ser esa misma parábola la curva de presion.

Tanjente de la curva de presion.

La inclinacion de la tanjente sobre la horizontal—o bien su coeficiente angular $tj\ \alpha$ respecto al eje de las x— es:

$$tj\ \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{2f}{l^2}x$$

que se obtiene derivando los dos miembros de la ecuacion de la curva $y = \frac{f}{l^2}x^2$ respecto a y.

Para $x=0$ (la clave), $tj\ \alpha = 0$, $\alpha = 0$; luego la tanjente es horizontal.

Para valores crecientes de x, la inclinacion $tj\ \alpha$ crece tambien.

I para $x=l$ (arranques), $tj\ \alpha = 2\frac{f}{l}$; es decir, el doble de la inclinacion de la recta que une A_1 con C. (Los valores de y se deducen de la ecuacion de la curva).

Esfuerzo normal N.

El esfuerzo normal en una seccion trasversal del arco, es la componente normal a esa seccion de la resultante de las acciones elásticas. *Si las secciones trasversales se trazan perpendicularmente a la curva de presion*, las componentes normales se confundirán con las resultantes mismas que tienen la direccion de la tanjente a la curva (propiedad de la curva de presion); como ademas la proyeccion horizontal de sus intensidades es igual al empuje Q ya conocido, se tendrá en una seccion cualquiera,

$$Q = N\cos\alpha;$$

o bien,

$$N = \frac{Q}{\cos\alpha} = Q\sqrt{1 + tj^2\ \alpha} = \frac{p}{2f}\sqrt{4f^2x^2 + l^4}$$

Se ve por esta espresion, que N crece en razon inversa de cos α (directa con el ángulo). En consecuencia, el menor valor de N estará en la clave i el mayor en los arranques, i su espresion analítica, en uno i otro caso, será:

$$\text{(clave) } N = Q = \frac{p\,l^2}{2\,f};$$

$$\text{(arranques) } N = \frac{p\,l^2}{2\,f}\sqrt{1+\frac{4\,f^2}{l^2}} = Q\sqrt{1+\frac{4\,f^2}{l^2}}$$

b). Carga aislada permanente P.—(fig. 4)

Reacciones verticales R_1 i R_2.—Empuje Q.

Tomemos los momentos para A_2, entre A_1 i A_2:

$$P\,(2\,l-s)-2\,l\,R_1=0;$$

luego,

$$R_1 = P\left(1-\frac{s}{2\,l}\right)$$

Para A_1 entre A_2 i A_1:

$$2\,l\,R_2 - P\,s = 0;$$

luego,

$$R_2 = P\,\frac{s}{2\,l}$$

Tomándolos con respecto a C, entre este punto i uno de los arranques (A_1 por ej.):

$$P\,(l-s)+Qf-R_1\,l=0;$$

reemplazando R_1 i despejando Q:

$$Q = P\,\frac{s}{2\,f}$$

Curva de presion.

Supongamos un punto incógnito (x, y) de esta curva a la derecha de la fuerza P, i tomemos los momentos a su alrededor para las fuerzas comprendidas entre él i A_1:

$$Q\,(f-y)-R_1(l-x)=0$$

reemplazando Q i R, i despejando y:

$$y = \frac{f\,(2\,l-s)}{ls}\,x - \frac{2\,f\,(l-s)}{s}$$

Resulta una ecuacion de la forma $y = a\,x + b$, representando una recta que debe arrancar de A_1, que pasa fuera del oríjen (porque hai término constante), i cuya inclinacion sobre la horizontal es: $tj\ \alpha = \dfrac{f\,(2\,l-s)}{l\,s}$ (coeficiente de x).

Tomando los momentos para otro punto (x, y) de la curva incógnita, situado a la izquierda de P, i para las fuerzas comprendidas entre él i el arranque A_2:

$$R_2\ (l+x)-Q\ (f-y)=0;$$

reemplazando R_2 i Q, i despejando y:

$$y=-\frac{f}{l}\ x;$$

ecuacion del tipo $y=a\ x$, representando una recta que arranca de A_2 i pasa por el oríjen (porque no hai término constante) con inclinacion $tj\ a=-\frac{f}{l}$ respecto a la horizontal. Esta recta debe cortar forzosamente a la anterior sobre la línea de accion de la fuerza P, a fin de que cierre el polígono funicular $A_1 O A_2$, que es la curva incógnita. Para cerciorarse de ello, basta introducir en las ecuaciones de las dos rectas la abscisa $(l-s)$ de esta fuerza: se tendrá un mismo valor $y=-\frac{f}{l}\ (l-s)$.

Esfuerzo normal N.

Su direccion se confundirá con las rectas $A_1\ O$, o' $A_2\ O$, segun el trozo.

Para $A_1\ O$ tenemos:

$$N=\sqrt{Q^2\ +R_1^2}=\frac{P}{2\ f\ l}\sqrt{l^2\ s^2+f^2\ (2l-s)^2}$$

i para $A_2\ O$:

$$N=\frac{P\ s}{2\ f\ l}\sqrt{l^2+f^2}$$

Una variante de esta forma de solicitacion es el caso de dos fuerzas iguales P, simétricas respecto a la articulacion C. (fig. 5).

Es evidente que se tiene:

$$R_1=R_2=P$$

$$Q_1=2Q=P\frac{s}{f}$$

Tomando los momentos para un punto (x, y) de la curva de presion incógnita, situado dentro de las dos fuerzas, entre este punto i uno de los arranques (el A_2 por ej.) se tiene:

$$R_2\ (l+x)-Q\ (f-y)-P\ (l-s+x)=0;$$

i reemplazando R_2 i Q:

$$\frac{P\ s}{f}\ y=0;$$

luego,

$$y=0;$$

que representa el eje de la x. Por tanto, la curva de presion entre las dos fuerzas es el mismo eje de la x.

Para un punto de la curva comprendido entre una de las dos fuerzas P i el arranque mas próximo (el A_1 por ej.), se tiene:

$$Q\ (f-y)-R_1\ (l-x)=0;$$

luego,

$$y=\frac{f}{s}\ x-\frac{f}{s}\ (l-s)$$

que representa la recta $A_1\ O_1$.

Del mismo modo se tendrá entre P i A_2 la recta $A_2\ O_2$.

Por consiguiente, la curva total de presiones es el polígono $A_1\ O_1\ O_2\ A_2$.

Este caso de solicitacion representa en las bóvedas la accion de una parte del relleno situado bajo la clave i del peso de bóveda que no es uniformemente repartido.

c).—Sobrecarga móvil unif. rep.—segun la horiz.—cubriendo i descubriendo gradualmente la luz.

Subdividiremos el estudio en tres casos; sea π la sobrecarga por m. c.

1.°.—*Cuando está cubierta toda la luz.*

Es un caso idéntico a la solicitacion *(a)* i sus fórmulas son iguales, pero figurando π en lugar de p.

2.°.—*Cuando está cubierta una semi-luz.* (La de la derecha por ej., fig. 6).

Reacciones verticales R_1, R_2.—*Empuje* Q.

Momento en A_2, entre A_1 i A_2:

$$\frac{2}{3}\ \pi\ l^2-2\ l\ R_1=0,$$

$$R_1=\frac{3}{4}\pi\ l$$

Momento en A_1 entre A_2 i A_1:

$$2\ l\ R_2-\frac{\pi\ l^2}{2}=0,$$

$$R_2=\frac{1}{4}\ \pi l$$

Momento en C, entre C i $(A_1$, por ej.)

$$\frac{\pi\ l^2}{2}+Q\ f-R_1\ l=0,$$

$$Q=\frac{\pi\ l^2}{4\ f}$$

Curva de presion.

Tomando los momentos en torno de un punto cualquiera $(x,\ y)$ de la semi-luz cargada, entre ese punto i $(A_1$ por ej.):

$$\frac{\pi\ (l-x)^2}{2}+Q\ (f-y)-R_1\ (l-x)=0$$

i de aquí,

$$y=\frac{2f}{l^2}x^2-\frac{f}{l}x;$$

que es la ecuacion de un arco de parábola de eje vertical (por estar y al primer grado), paralelo al eje de las y, con vértice fuera del eje de las x i una rama pasando por el oríjen (porque hai término en x).

El coeficiente angular $(tj\ \alpha)$ de su tanjente es:

$$tj\ \alpha=\frac{d\ y}{d\ x}=\frac{4f}{l^2}x-\frac{f}{l}$$

Para $x=0$ (clave), $tj\ \alpha=-\frac{f}{l}$, que es la inclinacion de la recta $A_2\ C$.

Para $x=\frac{l}{4}$, $y=-\frac{f}{8}$, $tj\ \alpha=0$, resulta tanjente horizontal.

Para valores mayores de x, $tj\ \alpha$ crece positivamente.

Para $x=\frac{l}{2}$, $y=0$ (la parábola corta al eje de las x), $tj\ =\alpha+\frac{f}{l}$ (inclinacion de $A_1\ C$)

Para $x=l$ (arranque A_1), $y=f$, $tj\ \alpha=\frac{3f}{l}$.

Tomemos ahora los momentos en torno de un punto cualquiera (x, y) de la semi-luz no cargada, entre ese punto i $(A_2$ por ej.):

$$R_2\ (l+x)-Q\ (f-y)=0$$

$$y=-\frac{f}{l}x;$$

resulta la ecuacion de la recta $A_2\ C$, cuya inclinacion es $tj\ \alpha=-\frac{f}{l}$. I como esta misma es la inclinacion de la tanjente al arco de parábola en la clave, la curva total de presiones será el arco de parábola de la semi-luz cubierta, i la tanjente a este arco en la clave, prolongada hasta el arranque A_2.

Si la semi-luz cubierta fuere la de la izquierda, sucederia la recíproca: arco de parábola a la izquierda, i la recta $C\ A_1$ a la derecha. Las reacciones R_1 i R_2 trocarian sus valores, pero Q seria siempre el mismo.

Esfuerzo normal N.

Para la recta, este esfuerzo es constante e igual a:

$$N=\sqrt{Q_2+R_2^2}=\frac{\pi\ l}{4\ f}\sqrt{l^2+f^2}$$

I en un punto cualquiera del arco de parábola:

$$N=\frac{Q}{\cos\alpha}=Q\sqrt{1+\text{tanj.}^2\ \alpha}=\frac{\pi}{4}\sqrt{8\ x\left(2\ x-l\right)+l^2\left(1+\frac{l^2}{f^2}\right)}$$

Para $x=0$ (clave), $N=\frac{\pi l}{4f}\sqrt{l^2+f^2}$, valor ya visto en el N de la recta.

Para $x=\frac{l}{4}$ (vértice), $N=Q=\frac{\pi l^2}{4f}$, valor mínimo fácil de deducir, porque $\cos\alpha=1$.

Para $x=\frac{l}{2}$ (sobre eje de las x), $N=\frac{\pi l}{4f}\sqrt{l^2+f^2}$ igual que para $x=0$, por igualdad de inclinacion.

Para $x=l$ (arranque A), $N=\frac{\pi l}{4f}\sqrt{l^2+9f^2}$, valor máximo.

Observando estos valores, del último hácia el primero, se ve que el esfuerzo normal decrece desde el arranque, donde es máximo, hasta el vértice de la parábola, donde es mínimo e igual al empuje, para crecer nuevamente hasta la clave i llegar con este último valor constante al arranque A_2. Se nota tambien que los valores de N entre la abscisa $x=\frac{l}{2}$ i el vértice, reaparecen simétricamente entre este vértice i la clave.

Si la semi-luz cubierta fuere la de la izquierda, tendriamos la recíproca.

3.°—*Cuando está cubierta una parte cualquiera de la luz.*

Se la determina de un modo análogo al anterior. Para la parte cargada la curva de presion es un arco de parábola, i para las no cargadas, rectas tanjentes a las estremidades de la parábola, rematando en los arranques.

Como aplicaciones de este caso, incluso al mismo tiempo los dos anteriores, se puede formar el siguiente cuadro que representa una série de posiciones de la sobrecarga móvil salvando la luz de derecha a izquierda (fig. 7).

Sobrecarga móvil π salvando gradualmente la luz de derecha a izquierda.

Período de la solicitacion	Valores de s siendo, luz$=2l$	Ecuacion del arco de párabola	Empuje $Q=$	Coordenadas del vértice de la parábola $x=$	$y=$
cubriendo la luz	o	....	....	....	....
	$\frac{1}{2}l$	$y=\frac{8f}{l^2}\left(x-\frac{l}{2}\right)^2-\frac{f}{l}x$	$\frac{1}{16}\frac{\pi l^2}{f}$	$+\frac{9}{16}l$	$-\frac{17}{32}f$
	l	$=\frac{2f}{l^2}x^2-\frac{f}{l}x$	$\frac{1}{4}\frac{\pi l^2}{f}$	$+\frac{1}{4}l$	$-\frac{1}{8}f$
	$\frac{3}{2}l$	$=\frac{8}{7}\frac{f}{l^2}x^2-\frac{f}{7l}x$	$\frac{7}{16}\frac{\pi l^2}{f}$	$+\frac{1}{16}l$	$-\frac{1}{224}f$
	$2l$	$=\frac{f}{l^2}x^2$	$\frac{1}{2}\frac{\pi l^2}{f}$	0	0
descubriendo la luz	o	$y=\frac{f}{l^2}x^2$	$\frac{1}{2}\frac{\pi l^2}{f}$	o	o
	$\frac{1}{2}l$	$=\frac{8}{7}\frac{f}{l^2}x^2-\frac{f}{l}x$	$\frac{7}{16}\frac{\pi l^2}{f}$	$-\frac{1}{16}l$	$-\frac{1}{224}f$
	l	$=\frac{2f}{l^2}x^2-\frac{f}{l}x$	$\frac{1}{4}\frac{\pi l^2}{f}$	$-\frac{1}{4}l$	$-\frac{1}{8}f$
	$\frac{3}{2}l$	$=\frac{8f}{l^2}\left(x-\frac{l}{2}\right)^2-\frac{f}{l}x$	$\frac{1}{16}\frac{\pi l^2}{f}$	$-\frac{9}{16}l$	$-\frac{17}{32}f$
	$2l$	....	....	....	....

Observando este cuadro, se nota que el mayor empuje corresponde al caso (a); i la mayor ordenada del vértice de la parábola, cuando está cubierta la *cuarta parte* de la luz o descubiertos los *tres cuartos*; pero entónces el empuje es mínimo. Sigue despues en mayor ordenada el caso (b), que ocupa el segundo lugar en mayor empuje.

En la práctica basta, jeneralmente, considerar las solicitaciones *(a)* i *(b)*, por ser las mas influyentes en cuanto al trabajo.

Deformacion de los arcos

Para completar el estudio teórico sobre los arcos a triple articulacion, en relacion con las bóvedas del mismo sistema, solo queda por tratar las deformaciones de la fibra media bajo la accion de la sobrecarga móvil i de los cambios de temperatura. En realidad, estas deformaciones son mucho mas pequeñas en las bóvedas que en los arcos, pues la sobrecarga representa una fraccion débil del peso total permanente, i los cambios de temperatura se hacen sentir ménos por el mal poder conductor de la albañilería, aparte de estar protejida por el relleno, i su menor coeficiente de dilatacion. Pero, a fin de apreciar la magnitud del juego de las articulaciones i de borrar *la falsa impresion de movilidad* que a primera vista se puede echar en cara al sistema, vamos a deducir las fórmulas que dán la deformacion i las rotaciones correspondientes de las articulaciones, que aplicaremos mas tarde a nuestros puentes.

a).—Deformaciones debidas a la sobrecarga móvil cubriendo toda la luz.

Supondremos que la fibra media de la bóveda, bajo la carga permanente total, es un arco de parábola. Por razon de simetría, la deformacion producida por la sobrecarga π cubriendo toda la luz se traducirá en un abajamiento vertical de la clave, i será mayor que para otra posicion cualquiera, por lo que nos limitaremos a ella solamente.

Por otra parte, para tener una fórmula final aljebraica, supondremos que la bóveda es de espesor constante, el que en las aplicaciones será el espesor medio.

Una i otra suposicion no desvirtuarán prácticamente los resultados númericos para el fin que perseguimos.

Consideremos solamente una de las semi-bóvedas (fig. 8).

Sea S el desarrollo de la fibra media, Ω la seccion trasversal constante, N el esfuerzo normal en una seccion cualquiera i E el coeficiente de elasticidad.

La solicitacion producirá compresion simple en todos los puntos, que estará representada por $\frac{N}{\Omega}$, i debido a esta, cada elemento infinitamente pequeño de la fibra media sufrirá un acortamiento.

$$\delta\, ds = \frac{N\, ds}{\Omega\, E};$$

i la suma de todos ellos, desde la clave al arranque, representará el acortamiento total ΔS de la semi-bóveda; luego

$$\Delta\, S = \int_{\text{clave}}^{\text{arranque}} \frac{N\, ds}{\Omega\, E} = \frac{1}{\Omega\, E} \int_{\text{cl.}}^{\text{arr.}} N\, ds$$

puesto que Ω i E son constantes en toda la bóveda.

Reemplacemos N i ds por sus valores en funcion de la semi-luz, de la flecha i de una de las coordenadas (la abscisa x). El desarrollo ds, que es el de un arco de parábola con su vértice en el oríjen, tiene por espresion analítica:

$$ds = \sqrt{d\, x^2 + d\, y^2} = d\, x \sqrt{1 + \frac{4\, f^2}{l^4} x^2} = \frac{1}{l^2} \sqrt{4\, f^2\, x^2 + l^4}$$

El esfuerzo normal N, para π cubriendo toda la luz, vale:

$$N = \pi \frac{\sqrt{4\, f^2\, x^2 + l^4}}{2\, f};$$

luego, poniendo los límites correspondientes a x:

$$\Delta \underset{\pi}{S} = \frac{\pi}{\Omega E} \int_o^l \frac{\sqrt{4 f^2 x^2 + l^4}}{2f} \cdot \frac{\sqrt{4 f^2 x^2 + l^4}}{l^2} d\,x = \frac{\pi}{\Omega E} \int_o^l \frac{2 f}{l^2} x^2 d\,x + \int_o^l \frac{l^2}{2 f} d\,x;$$

integrando:

$$\Delta S \pi = \frac{\pi}{\Omega E} \left[\frac{2 f}{3 l^2} x^3 + \frac{l^2}{2 f} x \right]_o^l = \frac{\pi}{\Omega E} \left(\frac{2}{3} f l + \frac{1}{2} \frac{l^3}{f} \right). \quad (1)$$

Este es el acortamiento total de una semi-bóveda.

Haciendo otro tanto la otra, la articulacion de la clave bajará verticalmente de una cantidad $\Delta f \pi$, cuyo valor vamos a deducir.

Como para el acortamiento, se tiene:

$$\Delta f \pi = \int_{\text{clave}}^{\text{arranque}} d\,f = \text{funcion}\,(\Delta\ S\pi)$$

El desarrollo S de una de las ramas de la parábola se obtiene, con toda exactitud práctica, por la fórmula (*):

$$S = l + \frac{2}{3} \frac{f^2}{l} - \frac{2}{5} \frac{f^4}{l^3}$$

Como l no cambia en la deformacion, podemos deducir el incremento Δf en funcion de ΔS, considerando como variable independiente a f, diferenciando respecto a ella esa igualdad i poniendo en vez de $d\,S$ i $d\,f$ los incrementos totales $\Delta\ S\pi$ i $\Delta\ f\pi$; esto puede hacerse por ser $\Delta\ f\pi$ mui pequeño.

Asi se tiene:

$$\Delta\ S\pi = \left(\frac{4}{3} \frac{f}{l} - \frac{8}{5} \frac{f^3}{l^3} \right) \Delta f \pi \qquad (2)$$

I despejando a $\Delta\ f\pi$ entre las ecuaciones (1) i (2):

$$\Delta\ f\pi = \frac{\pi}{\Omega E} \frac{l^2}{f_2} \frac{15\, l^2 + 20\, f^2}{40\, l^2 - 48\, f^2}$$

Angulo de jiracion en si misma de la articulacion de la clave.—

Basta ver la (fig. 8) para comprender que las articulaciones de los arranques tendrán mucha menor rotacion que la de clave, que es donde se produce todo el incremento Δf. Respecto a esta, es evidente que el arco descrito por el punto de interseccion a de la fibra media con la circunferencia de la rótula será la jiracion total. El efecto del descenso se traducirá en que dicho punto pase de la posicion primitiva a a la nueva a' describiendo el arco $a\ a'$, cuyo seno $a'\ b$ es igual a Δf.

Luego,

$$\text{Angulo de jiracion} = \text{ang.} \left(\text{sen} = \frac{\Delta\ f\pi}{r} \right),$$

siendo r el radio de la rótula.

(*).—Resal: *Ponts métalliques*, páj. 224.

b).—Deformacion debida a un cambio de temperatura.

Siendo S el desarrollo de una de las ramas de la parábola, α el coeficiente de dilatacion lineal de la albañilería, i t^o un aumento (por ejemplo) de temperatura respecto a la *temperatura media* (*) de la bóveda, el incremento *positivo* del desarrollo será:

$$\Delta S_t = a.\ t^o.\ S = a.\ t^o \left(l + \frac{2}{3} \frac{f^2}{l} - \frac{2}{5} \frac{f^4}{l^3} \right)$$

La *elevacion* correspondiente (Δf_t) de la clave se obtendrá, como anteriormente, diferenciando el valor de S respecto a f, puesto que l es tambien aquí constante:

$$\Delta S_t = \left(\frac{4}{3} \frac{f}{l} - \frac{8}{5} \frac{f^3}{l^3} \right) \Delta f_t \ ;$$

i despejando a Δf_t entre ambas ecuaciones, se obtienen:

$$\Delta f_t = a.\ t^o.\ \frac{15\ l^4 + 10\ l^2 f^2 - 6 f^4}{20\ l^3 f - 24\ l f^3}$$

Ángulo de jiracion en si misma de la articulacion de la clave.—

$$\text{Ángulo de jiracion} = \text{arc} \left(\text{sen} = \frac{\Delta f_t}{r} \right)$$

(*).—La *temperatura media* para una bóveda, es la temperatura que hai inmediatamente despues del descimbramiento.

Puentes de concreto con bóvedas a triple articulacion

Jerardo Arteaga A.

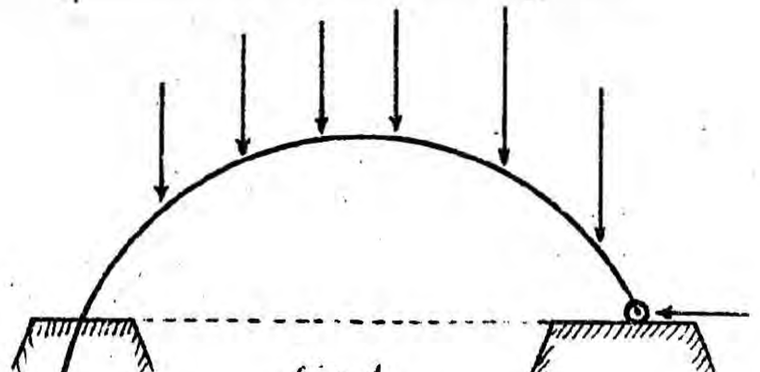

fig. 1

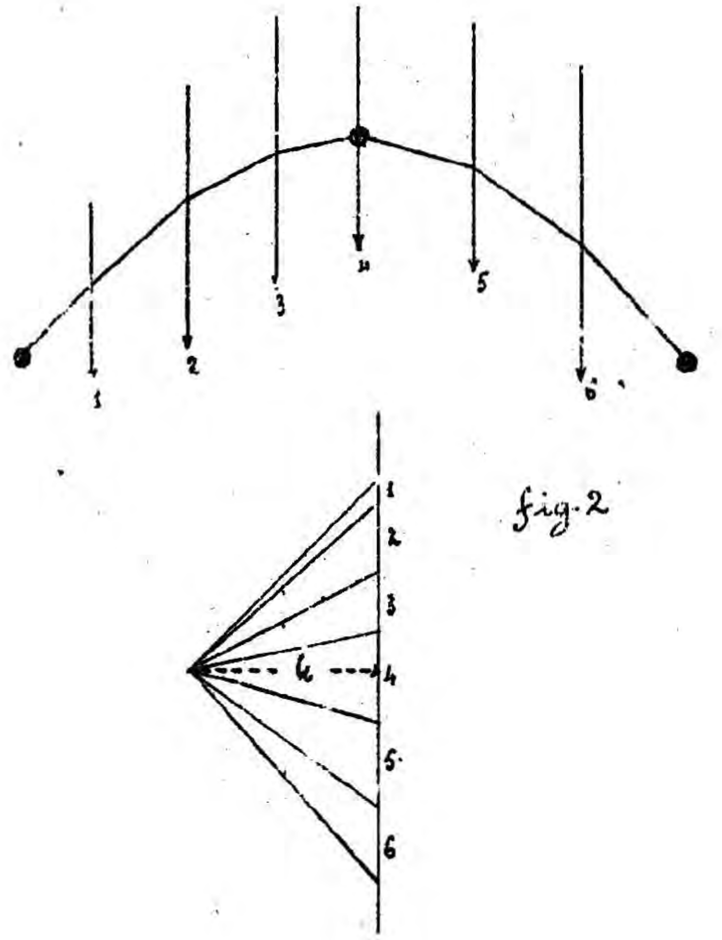

fig. 2

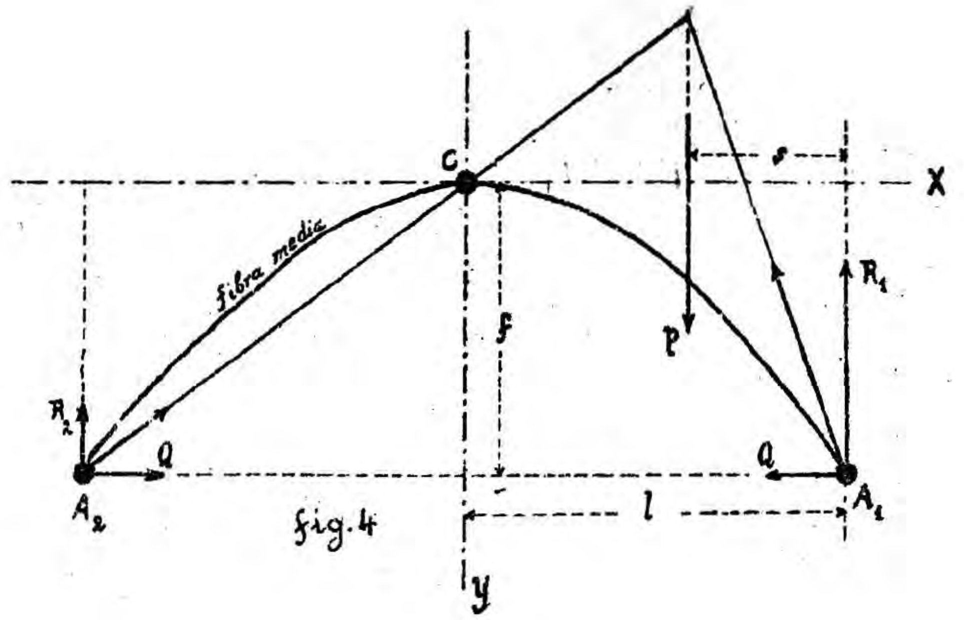

fig. 4

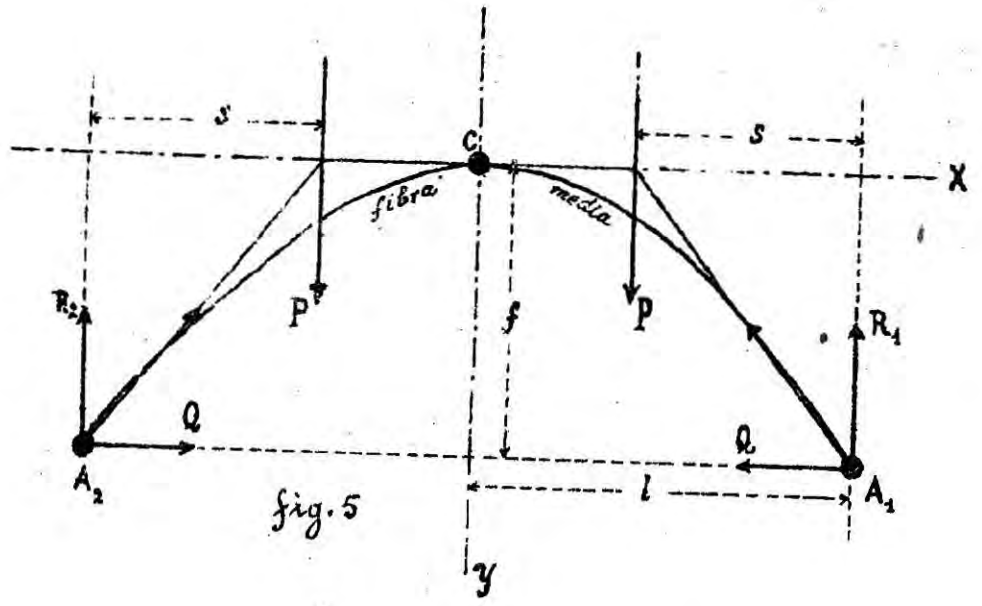

fig. 5

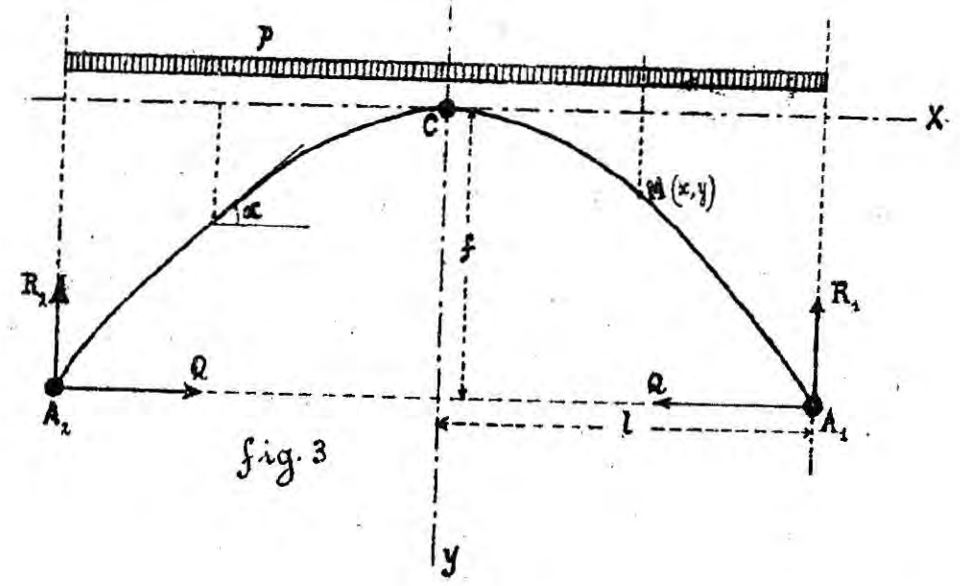

fig. 3

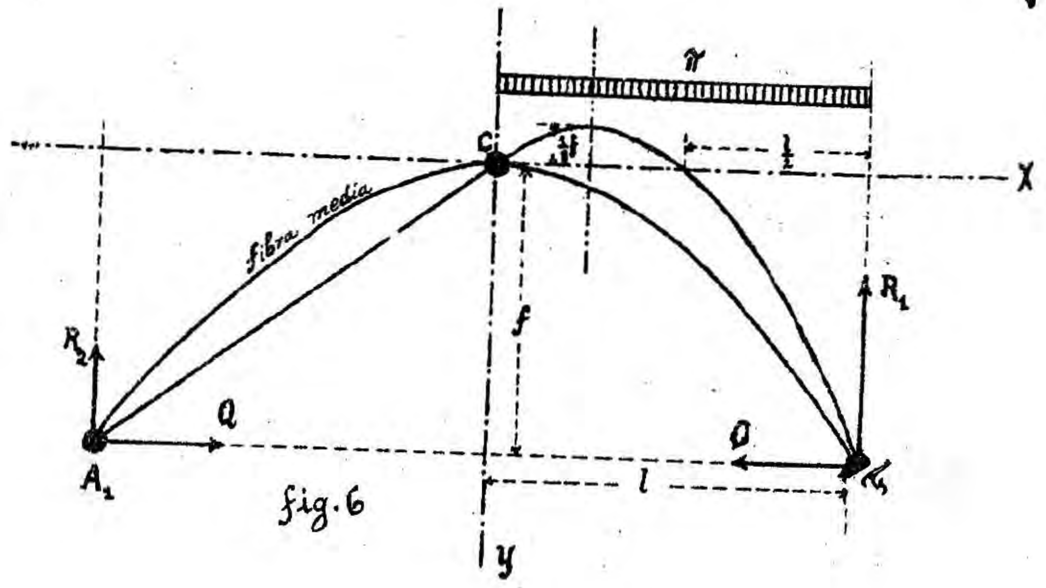

fig. 6

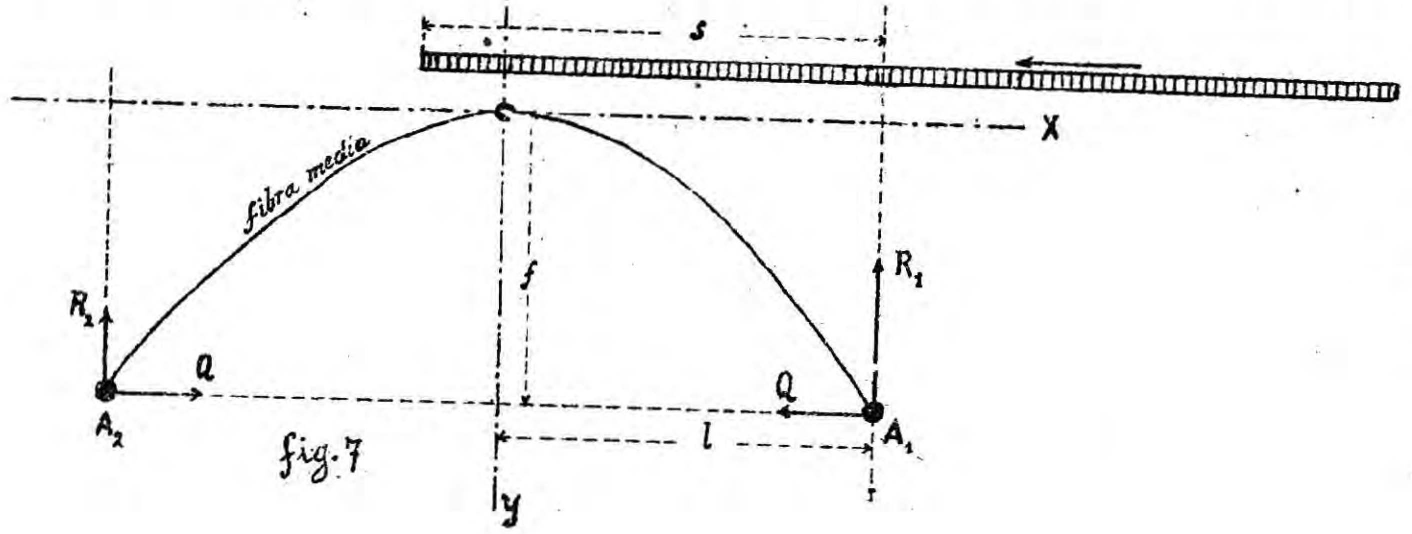

fig. 7

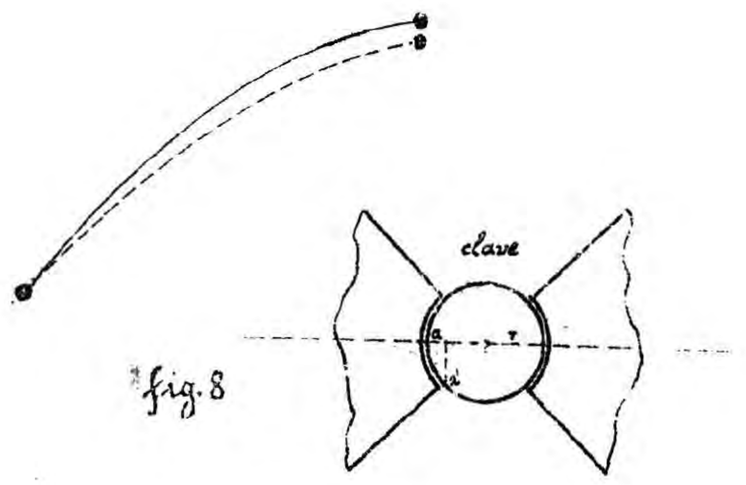

fig. 8

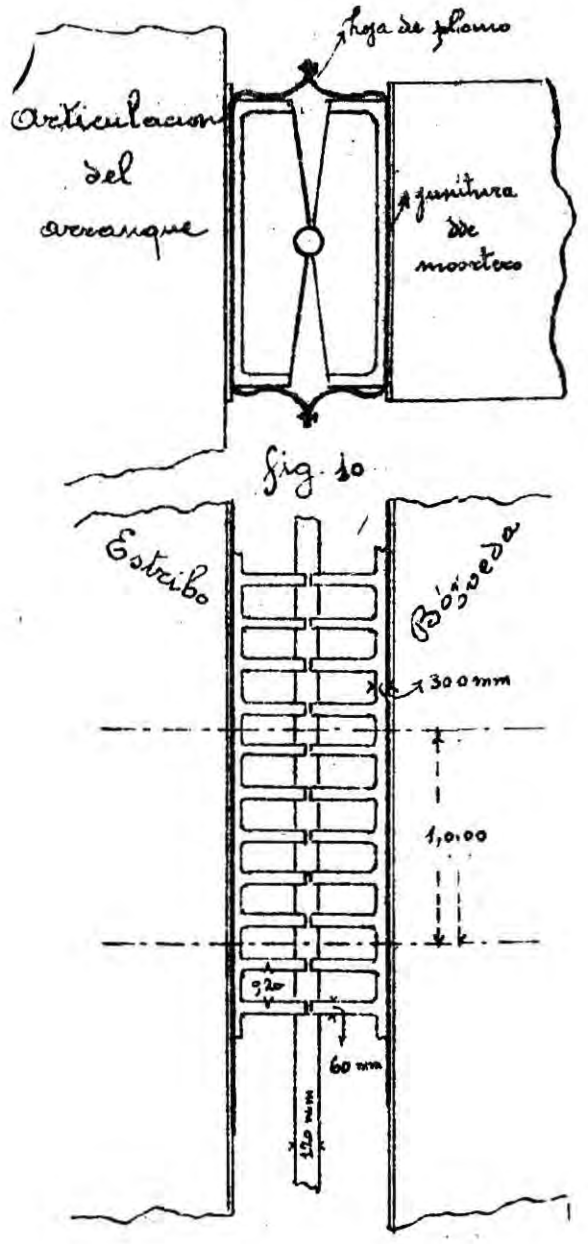

fig. 10

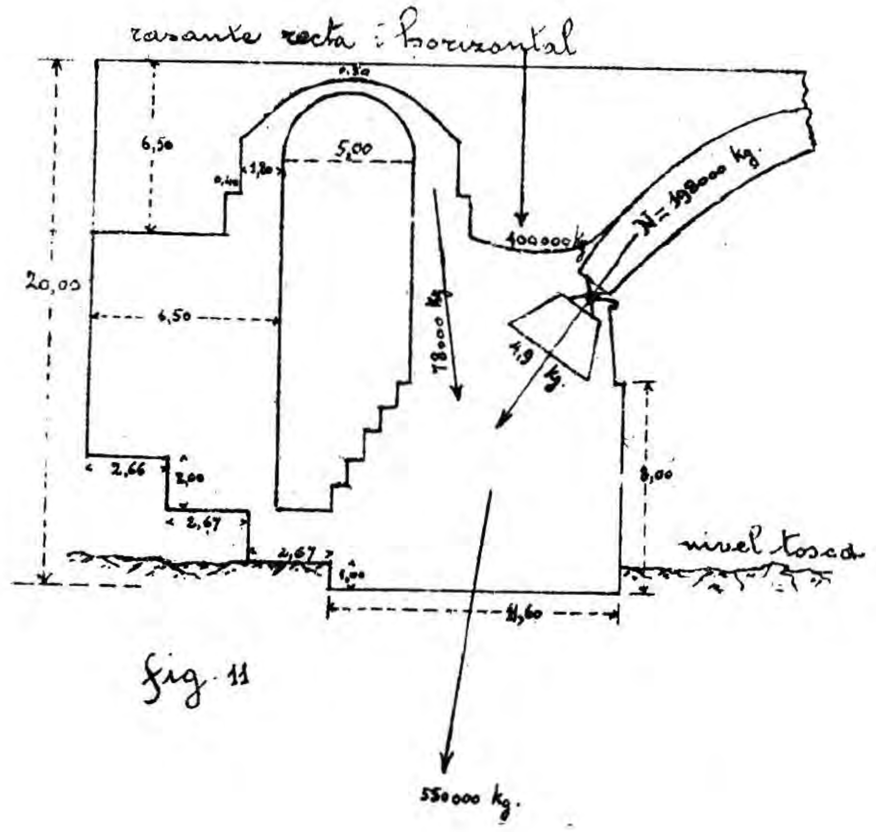

fig. 11

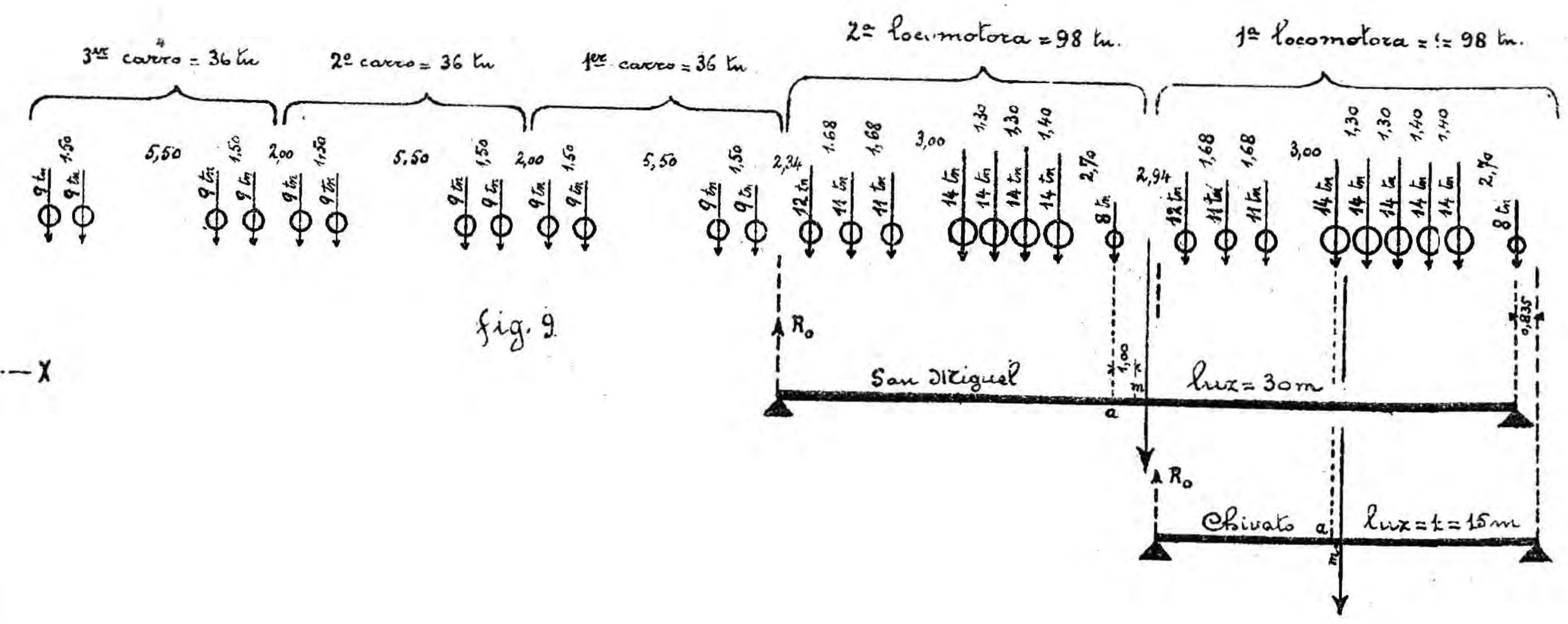

fig. 9

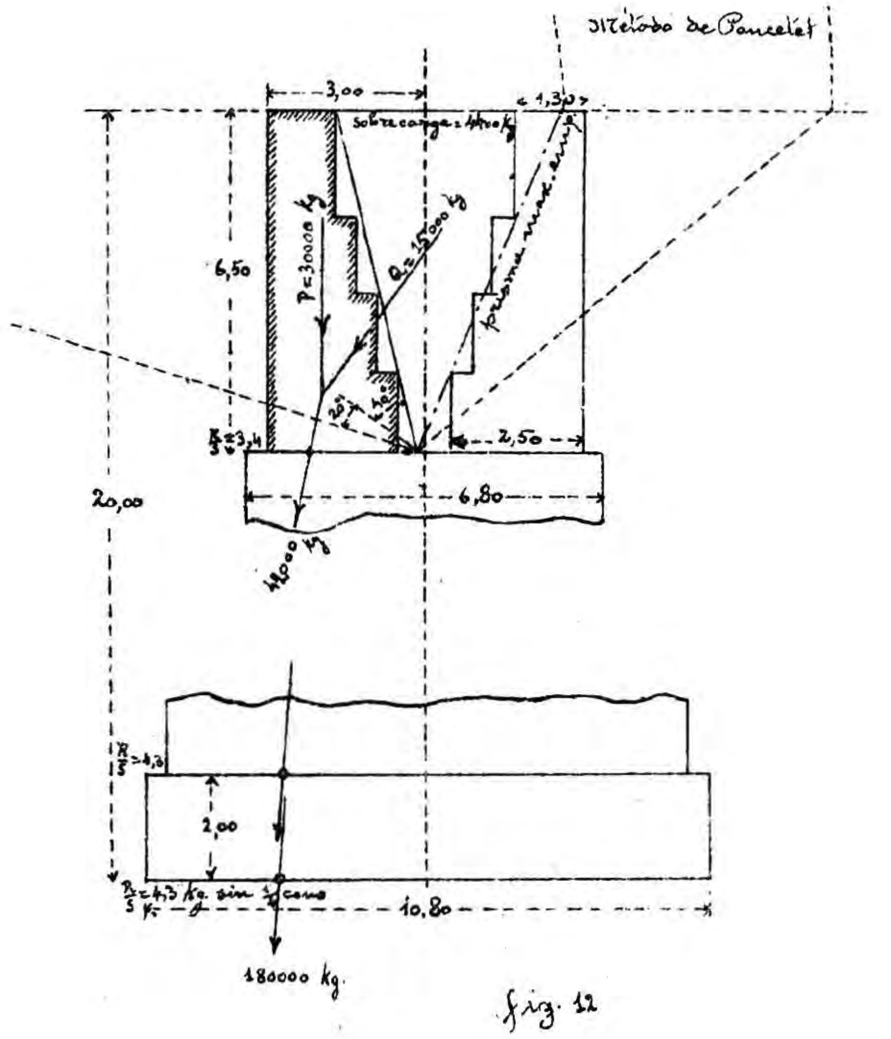

fig. 12